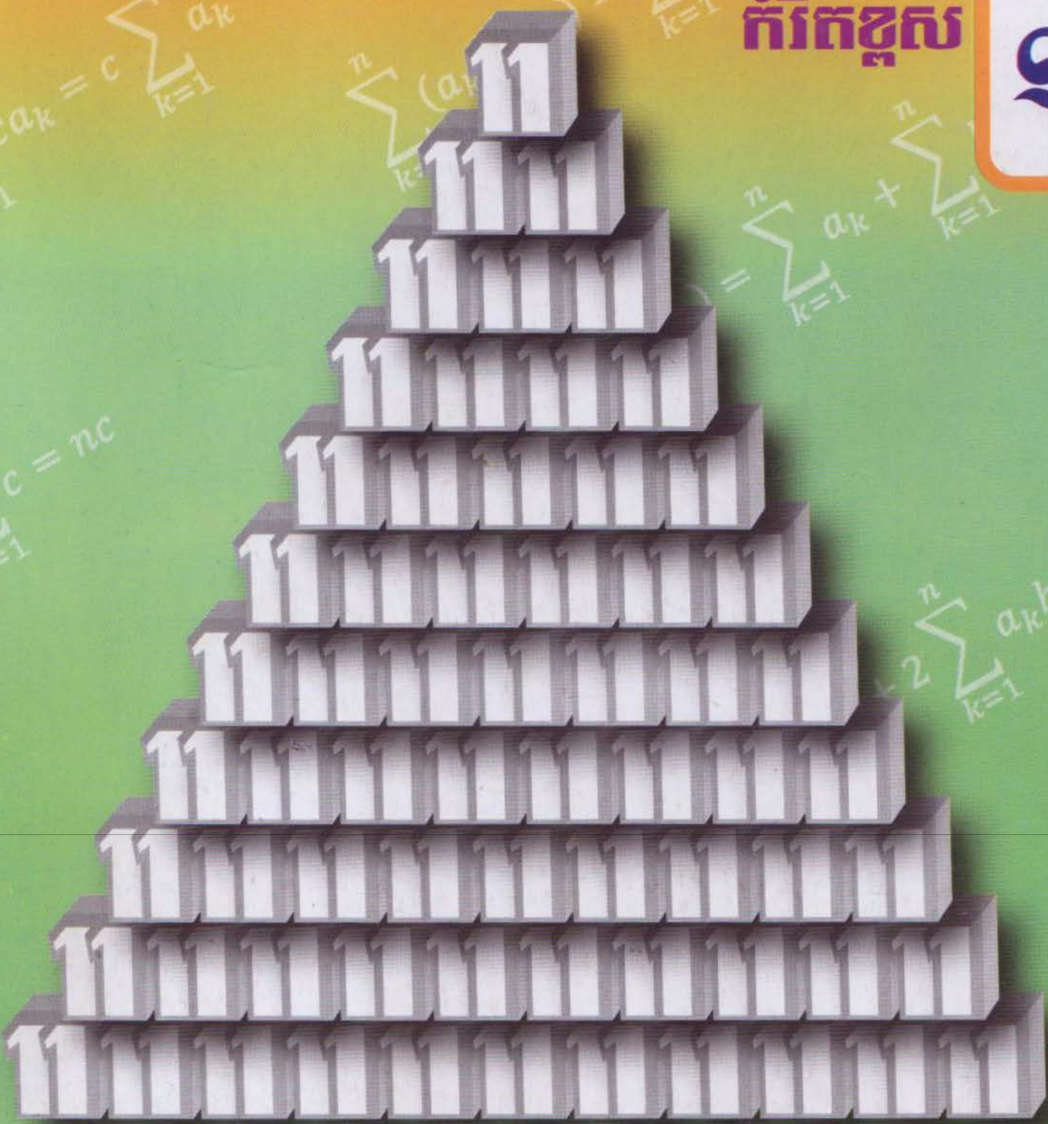
PROEUS DARA

ហាមលក់
កម្មសិទ្ធិរបស់រដ្ឋ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

កំរិតខ្ពស់ ១១



គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

PROEUS DARA

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ណាល័យ

គណិតវិទ្យា

កំរិតខ្ពស់

ថ្នាក់ទី ១១

បោះពុម្ពផ្សាយដោយ

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

អគារ ១៤៨ មហាវិថី ព្រះនរោត្តម ភ្នំពេញ

PROEUS DARA

គណៈកម្មការនិពន្ធ	លោក អ៊ី ស៊ាងលី	លោកស្រី ទី ប៉ូលីរ៉េត
	លោក ឌិក លីនដា	លោកស្រី អ៊ុក សុមនី
	លោក ចាន់ រ៉ាដា	លោក ប៊ុន រួ
	លោក ន្ធ រ៉េត	
អ្នកវាយអត្ថបទ	លោកស្រី ឈាង ណារីន	
វិចិត្រករ	លោក តន់ ជាតិ	
អ្នករៀបរៀង	លោក ឡុង សុផេង	លោក ព្រំ ងួន
អ្នករចនាទំព័រ	លោក ខែម ម៉ារី	
អ្នកឯកទេស	លោក អ៊ិន គឹមស្រ៊ុន	
គណៈកម្មការពិនិត្យ	លោក ថៃ ហេង	លោក សុខ ធី
	លោក ប៊ូ សន	លោក ហេង ចន្ថា

បានទទួលការអនុញ្ញាតឱ្យបោះពុម្ពផ្សាយពី ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា តាមប្រកាសលេខ ៣០០១អយក.ប្រក. ចុះថ្ងៃទី៣០ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០០៨ ដើម្បីប្រើប្រាស់នៅតាមសាលារៀន ។

ហាមថតចម្លងសៀវភៅនេះ

រក្សាសិទ្ធិ ©

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ

បោះពុម្ពលើកទី ៤ ឆ្នាំ២០១២ ចំនួន ២៧ ២០០ច្បាប់

ISBN 9-789-995-000-691

PROEUS DARA

អារម្ភកថា

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់ថ្នាក់ទី 11 រួមមាន ៩ ជំពូក ដែលសិក្សាអំពី ស្ទីតនិងអនុមានរួម គណិតវិទ្យា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ បំលែងលីនេអ៊ែរ ប្រូបាប ដេរីវេប្លង់កុំផ្លិច និងវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ។ សិស្សដែលជ្រើសរើសយកគណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់ត្រូវរៀនគណិតវិទ្យាកំរិតមូលដ្ឋានដើម្បីបំពេញបន្ថែម ។

ការរៀបចំមេរៀននៅក្នុងសៀវភៅនេះ មានទម្រង់ដូចខាងក្រោម ៖

- មេរៀននីមួយៗ បានបញ្ជាក់អំពីវត្ថុបំណងច្បាស់លាស់
- ខ្លឹមសារមេរៀននីមួយៗ ផ្ដើមចេញពីឧទាហរណ៍ក្នុងជីវភាពរស់នៅ
- មានលំហាត់ប្រតិបត្តិសម្រាប់ពង្រឹងចំណេះដឹងសិស្ស
- នៅចុងមេរៀននៃជំពូកនីមួយៗ មានសង្ខេបគន្លឹះមេរៀនសម្រាប់ឱ្យសិស្សចងចាំនូវអ្វីដែលបានរៀនរួច
- មេរៀននីមួយៗ មានលំហាត់និងលំហាត់ជំពូកសម្រាប់ឱ្យសិស្សអនុវត្តដើម្បីពង្រឹងចំណេះដឹង
- នៅចុងទំព័រនៃសៀវភៅនេះ មានពន្យល់ពាក្យគន្លឹះនិងមានចម្លើយលំហាត់សម្រាប់ឱ្យសិស្សផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

សៀវភៅសិក្សានេះមានការចូលរួមពី ៖

- លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលបានសាកល្បងជួយផ្ដល់យោបល់
- លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលបានសាកល្បងបង្រៀននូវសៀវភៅសិក្សានេះ
- គណៈកម្មការវាយតម្លៃដែលបានជួយត្រួតពិនិត្យនិងផ្ដល់យោបល់ ។

ដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះ កាន់តែល្អប្រសើរ យើងខ្ញុំនឹងរង់ចាំទទួលរាល់ការរិះគន់និងកែលំអបន្ថែមអំពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងប្រិយមិត្តអ្នកប្រើប្រាស់សៀវភៅគណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់នេះដោយក្ដីរីករាយ ។

គណៈកម្មការនិពន្ធ

បញ្ជីអត្ថបទ

គណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់

ជំពូកទី 1 : ស្វ៊ីតនិងអនុមានរួមគណិតវិទ្យា 1
1. ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ 2
2. ទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត 16
3. វិចារអនុមានរួម 24

ជំពូកទី 2 : អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត 35
1. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 36
2. អនុគមន៍លោការីត 46

ជំពូកទី 3 : សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ 57
1. សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ 58

ជំពូកទី 4 : បំលែងលីនេអ៊ែរ 73
1. បំលែងលីនេអ៊ែរ 74

ជំពូកទី 5 : លីមីតនិងដេរីវេ 103
1. អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះសមីការនិងវិសមីការ 104

ជំពូកទី 6 : ប្រូបាប 117
1. ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ 118

ជំពូកទី 7 : ចំនួនកុំផ្លិច 135
1. ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត 136
2. ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ 144
3. ស្វ័យគុណទី n និងឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច 164
4. អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ 174

ជំពូកទី 8 : វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ 189
1. វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ 190
2. សមីការបន្ទាត់និងសមីការប្លង់ក្នុងលំហ 216

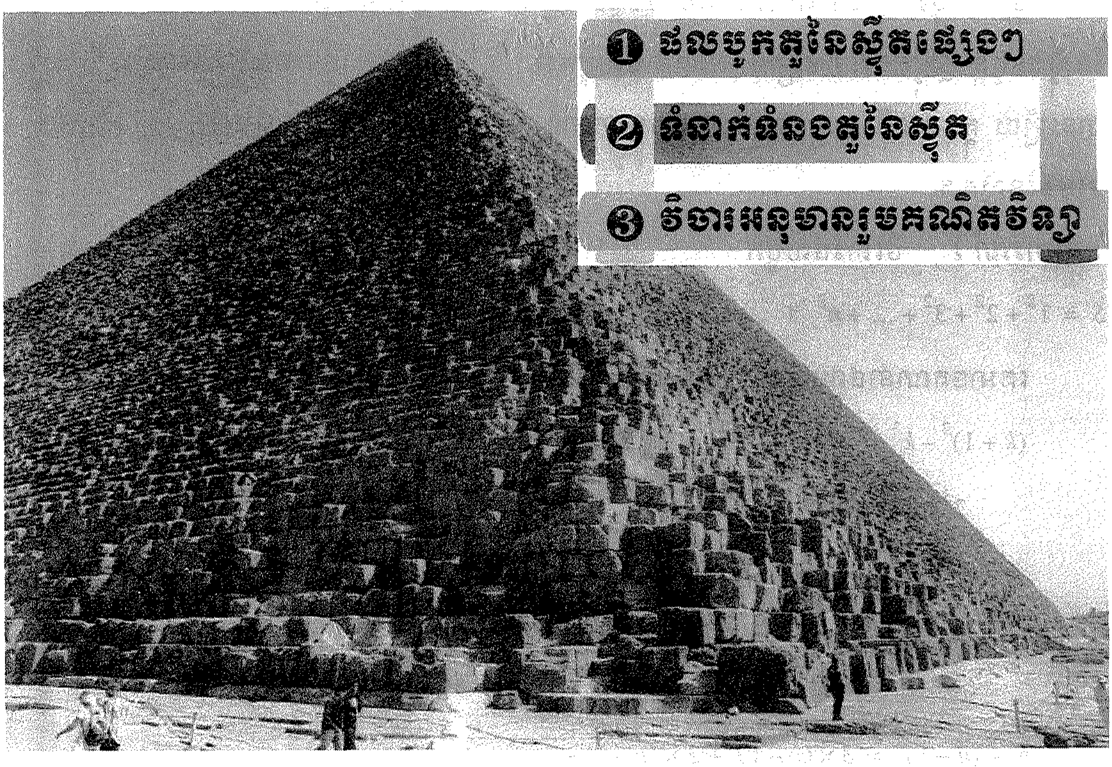
ចម្លើយជំពូក 235

បទានុក្រម 247

ជំពូក 1

ស៊ីតនិងអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

1. ផលបូកតួនៃស៊ីតផ្សេងៗ
2. ទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត
3. វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា



ការសិក្សាស៊ីតបណ្តាលឱ្យគណិតវិទ្យាកាន់តែមានការរីកចម្រើនឡើងពីមួយថ្ងៃទៅមួយថ្ងៃ តាមរយៈផលបូកតួនៃស៊ីតអាចឱ្យគេសង់បាននូវតារាងនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនិងអនុគមន៍លោការីតមិនត្រឹមតែប៉ុណ្ណោះក៏អាចឱ្យគេគណនាបាននូវតម្លៃលេខ e និង π ទៀតផង ។

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

មេរៀនទី 1

ផលបូកតួនៃស៊ីតផ្សេងៗ

1. របៀបគណនាផលបូក

វត្ថុបំណង

- គណនាផលបូកតួនៃស៊ីត
- ចេះប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ សំរាប់ផលបូកនៃស៊ីត
- កំណត់តួទី n តាមផលសងស៊ីតលំដាប់ 1 និងលំដាប់ 2

ចំពោះស៊ីតផ្សេងៗ គេពុំអាចប្រើរូបមន្តផលបូកនៃស៊ីតនព្វន្ត ឬស៊ីតធរណីមាត្រមកគណនាផលបូកវាបានឡើយ ក្នុងករណីនេះត្រូវប្រើវិធីផ្សេងៗទៅតាមទម្រង់នៃស៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ 1 ចំពោះផលបូក

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ ។

គេអាចគណនាផលបូកនេះដោយប្រើសមភាព

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ ដោយឱ្យ k យកតម្លៃពី 1 ដល់ n

$$2^3 - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3\times(n-1)^2 + 3\times(n-1) + 1$$

$$\underline{(n+1)^3 - n^3 = 3\times n^2 + 3\times n + 1}$$ បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\times(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3\times(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1)$$

$$= 3\times S + 3\times\frac{n(n-1)}{2} + n$$

គណនា S គេបាន $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ចំពោះផលបូក $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

គេអាចគណនាផលបូកនេះដោយប្រើសមភាព

$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ដោយឱ្យ k យកតម្លៃពី 1 ដល់ n

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

....

$$\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន $S=1-\frac{1}{n+1}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

លំហាត់គំរូ គណនាផលបូក $S=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ ។

ចម្លើយ គេអាចគណនាផលបូកនេះដោយប្រើសមភាព

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ ដោយឱ្យ k យកតម្លៃពី 1 ដល់ n

$$2^4-1^4=4\times 1^3+6\times 1^2+4\times 1+1$$

$$3^4-2^4=4\times 2^3+6\times 2^2+4\times 2+1$$

$$4^4-3^4=4\times 3^3+6\times 3^2+4\times 3+1$$

....

$$n^4-(n-1)^4=4\times(n-1)^3+6\times(n-1)^2+4\times(n-1)+1$$

$(n+1)^4-n^4=4\times n^3+6\times n^2+4\times n+1$ បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$(n+1)^4-1^4=4\times(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+6\times(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$
$$+4\times(1+2+3+\ldots+n)+(1+1+1+\ldots+1)$$
$$=4S+6\times(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+4\times(1+2+3+\ldots+n)+(1+1+1+\ldots+1)$$

គណនា S គេបាន $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ប្រតិបត្តិ គណនា $S=12^3+13^3+14^3+\ldots+50^3$

គណនា $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$

2. គណនាផលបូកតាមលំនាំគំរូ

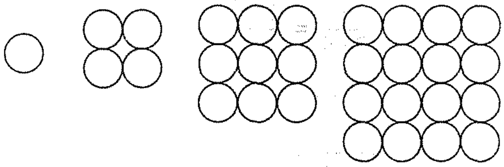
ចំពោះស៊ីតដែលមានតួជាចំនួនគត់ គេអាចគណនាផលបូកវាតាមការសង្កេតលំនាំគំរូ ។

$1 = 1 = 1^2$

$1+3 = 4 = 2^2$

$1+3+5 = 9 = 3^2$

$1+3+5+7 = 16 = 4^2$



ហេតុនេះ $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

លំហាត់គំរូ គណនាផលបូក n តួនៃចំនួនគូ $S = 2+4+6+\ldots+2n$

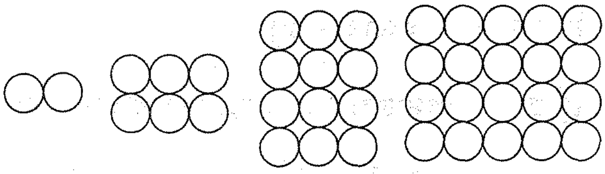
ចម្លើយ

$2 = 2 = 1\times 2$

$2+4 = 6 = 2\times 3$

$2+4+6 = 12 = 3\times 4$

$2+4+6+8 = 20 = 4\times 5$



ហេតុនេះ $2+4+6+\ldots\ +2n = n\cdot(n+1)$

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យលំនាំគំរូនៃស៊ីតខាងក្រោម ៖

$1 = 1$

$1+7 = 8$

$1+7+19 = 27$

$1+7+19+37 = 64$

$1+7+19+37+61 = 125$

គណនាផលបូកនៃស៊ីតនេះដែលមាន 10 តួ

3. និមិត្តសញ្ញា Σ សំរាប់ផលបូកនៃស៊ីត

3.1 សញ្ញាណ Σ

ក្នុងការសរសេរផលបូកតួនៃស៊ីត U_1 , U_2 , U_3 , ..., U_n គេប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ អានថា ស៊ិចម៉ា សម្រាប់តាងផលបូក n តួនៃស៊ីត ។ គេកំណត់សរសេរ $\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ ។

ក្នុងនោះ k យកតម្លៃពី 1, 2, 3, ... រហូតដល់ n ។

ឧទាហរណ៍ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

លំហាត់គំរូ 1 សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ :

ក. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

ខ. $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100$

គ. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{50}$

ចម្លើយ ក. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$

ខ. $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100 = 2\times 1 + 2\times 2 + 2\times 3 + \ldots + 2\times 50$

ផលបូកស៊ីតនេះមានតួទូទៅ $2n$ ហើយ n យកតម្លៃពី 1 ដល់ 50

គេបាន $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100 = \sum_{n=1}^{50} 2n$ ។

គ. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{50}$ ផលបូកនេះ n យកតម្លៃពី 2 ដល់ 50 ។

តួទូទៅនៃស៊ីត $\frac{(-1)^n}{n}$ ។

គេបាន $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{50} = \sum_{n=2}^{50} \frac{(-1)^n}{n}$ ។

លំហាត់គំរូ 2

សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូកដោយមិនប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ

ក. $\sum_{k=1}^{6} 2$

ខ. $\sum_{n=2}^{5} (2n+1)$

គ. $\sum_{j=1}^{5} j(j+1)$

ចម្លើយ

ក. $\sum_{k=1}^{6} 2 = 2+2+2+2+2+2$

ខ. $\sum_{n=2}^{5} (2n+1) = 5+7+9+11$

គ. $\sum_{j=1}^{5} j(j+1) = 1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+5\times 6$

ប្រមតិបត្តិ សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ :

ក. $2+5+8+\ldots+(3n-1)$

ខ. $3+6+12+\ldots+3(2)^{n-1}$

គ. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{100}$

PROEUS DARA

3.2 ផលបូកមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម ៖

ក. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

ខ. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

គ. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

ឃ. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

ង. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + c + \ldots + c = nc$

ខ. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

គ. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

ឃ. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_n - b_n)$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \quad + b_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

ង. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. $\sum_{k=1}^{15}(4k+3)$

ខ. $\sum_{k=1}^{20}(k+3)k$

ចម្លើយ ក. $\sum_{k=1}^{15}(4k+3) = \sum_{k=1}^{15}4k + \sum_{k=1}^{15}3 = 4\sum_{k=1}^{15}k + \sum_{k=1}^{15}3$

$$= 4(1+2+3+\ldots+15)+15\times 3 = 4\times\frac{(1+15)\times 15}{2}+45 = 2\times 16\times 15+45 = 525$$

ខ. $\sum_{k=1}^{20}(k+3)k = \sum_{k=1}^{20}(k^2+3k) = \sum_{k=1}^{20}k^2+3\sum_{k=1}^{20}k$

$$= \frac{(20)\times(20+1)\times\ (2\times 20+1)}{6}+3\frac{(1+20)\times 20}{2}$$

$$= 10\times 7\times 41+3\times 21\times 10 = 2870+630 = 3500$$

ប្រតិបត្តិ គណនា ក. $\sum_{k=1}^{20}(3k+1)$

ខ. $\sum_{k=1}^{7}2^k$

គ. $\sum_{k=4}^{14}(4k-3)$

ឃ. $\sum_{k=1}^{n}(3+k)^2$

ង. $\sum_{k=1}^{30}k(k+1)$

4. របៀបកំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស៊ីត

គេអាចកំណត់តួទី n របស់ស៊ីត (a_n) ដែលពុំមែនជាស៊ីតនព្វន្ត ឬជាស៊ីតធរណីមាត្រតាមរបៀបដូចខាងក្រោម ៖

4.1 ផលសងតួលំដាប់ទី 1

ឧទាហរណ៍ 1 កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1, 3, 7, 13, 21, 31,\dots$ ។

ចម្លើយ គេសង្កេតឃើញថាស៊ីតនេះមិនមែនជាស៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។ នោះគេត្រូវធ្វើផលសងនៃតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស៊ីត $1, 3, 7, 13, 21, 31,\dots$ គេបានលំនាំគំរូដូចជា

n	:	1	2	3	4	5	6...
ស៊ីត (a_n)	:	1	3	7	13	21	31...
ផលសងលំដាប់ 1 នៃស៊ីត	:	2	4	6	8	10...	

ផលសងតួនៃស៊ីតអាចជួយឱ្យគេរកលំនាំគំរូ ដែលអាចកំណត់តួទូទៅនៃស៊ីតបានដូចជា

$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2\times 1$

$a_3 - a_2 = 7 - 3 = 4 = 2\times 2$

$a_4 - a_3 = 13 - 7 = 6 = 2\times 3$

....

$a_{n-1} - a_{n-2} = 2\times(n-2)$

$a_n - a_{n-1} = 2\times(n-1)$

បូកអង្គនិងអង្គទាំងអស់ គេបាន

$a_n - a_1 = a_n - 1 = 2\times 1 + 2\times 2 + 2\times 3 + \dots + 2\times(n-2) + 2\times(n-1)$

$$a_n = 2\times 1 + 2\times 2 + 2\times 3 + \dots + 2\times(n-2) + 2\times(n-1) + 1$$

$$= 2\times[\ 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1)] + 1 = 2\times\frac{[\ 1+(n-1)](n-1)}{2} + 1$$

$$= n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីត $1, 3, 7, 13, 21, 31,\dots$ កំណត់ដោយ $a_n = n^2 - n + 1$ ។

ជាទូទៅ គេមានស៊ីត $(a_n) : a_1\ , a_2\ , a_3\ , \dots, a_n$ ហើយ $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $b_3 = a_4 - a_3$,..., $b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$ ។ ស៊ីត $(b_n) : b_1\ , b_2\ , b_3\ , \dots, b_{n-1}$ ហៅថាផលសងលំដាប់ 1 នៃស៊ីត (a_n) ។

ឧទាហរណ៍ 2 បង្ហាញថា $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

$$\underbrace{a_1 \quad a_2}_{b_1} \underbrace{\quad a_3}_{b_2} \underbrace{\quad a_4}_{b_3} \underbrace{\quad \ldots}_{b_4} \underbrace{\quad a_{n-1}}_{b_{n-2}} \underbrace{\quad a_n}_{b_{n-1}}$$

$$+\begin{cases} a_2 - a_1 = b_1 \\ a_3 - a_2 = b_2 \\ a_4 - a_3 = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} = b_{n-2} \\ a_n - a_{n-1} = b_{n-1} \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}$$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $b_{n-1} = b_0$ មិនមាន ។

ដូចនេះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ជាទូទៅ គេមានស្វ៊ីត (a_n) និងស្វ៊ីត (b_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

លំហាត់គំរូ 1 កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2, 4, 8, 14, 22, 32, \ldots$ ។

ចម្លើយ តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលគេឱ្យ ។ ស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលមានតួ b_n កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$

ស្វ៊ីត $(b_n) : 2, 4, 6, 8, \ldots$

ស្វ៊ីត (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 2 និងផលសងរួមស្មើ 2 នោះ

$b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 + 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) = 2 + n^2 - n = n^2 - n + 2$$

នោះ $a_n = n^2 - n + 2$ ។

ចំពោះ $n = 1$, $a_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$ ពិត ។

ដូចនេះ ស្ទីត (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^2 - n + 2$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ក. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត 1, 2, 5, 10, 17,... ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ ។

ចម្លើយ ក. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (a_n) : 1, 2, 5, 10, 17,...

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្ទីតដែលគេឱ្យ (a_n) ។ ស្ទីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស្ទីត (a_n) ដែលមានតួ b_n កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ ស្ទីត (b_n) : 1, 3, 5, 7,... ។ ស្ទីត (b_n) ជាស្ទីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 1 និងផលសងរួមស្មើ 2 នោះ $b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$ ។

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - (n-1)$

$$= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = 1 + n^2 - n - n + 1 = 2 - 2n + n^2$$

នោះ $a_n = 2 - 2n + n^2$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $a_1 = 2 - 2 + 1 = 1$ ពិត ។ ដូចនេះ $a_n = 2 - 2n + n^2$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីត (a_n)

តាង S_n ជាផលបូកនៃស្ទីត (a_n) គឺ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n}(2 - 2k + k^2)$$

$$= 2n - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2n - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{12n}{6} - \frac{6}{6}n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n(12 - 6n - 6 + 2n^2 + n + 2n + 1)$$

$$= \frac{1}{6}n(7 - 3n + 2n^2)$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 - 3n + 7)$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $4, 5, 7, 10, 14, \ldots$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

2. ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $3, 5, 8, 12, 17, 23, \ldots$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

4.2 ផលសងលំដាប់ទី 2 តួនៃស៊ីត

បើសិនជាស៊ីត (b_n) នៅតែមិនអាចកំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) បានទៀត នោះគេត្រូវធ្វើផលសងលំដាប់តួនៃស៊ីត (b_n) បន្តទៀត ដែលគេហៅថា ផលសងលំដាប់ទី 2 តួនៃស៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $(a_n) : 1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$ ។

របៀបទី 1 n : 1 2 3 4 5 6...

ស៊ីត (a_n) : 1 2 6 15 31 56... ។

ផលសងលំដាប់ 1 : 1 4 9 16 25...

តាង a_n ជាតួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។ ស៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស៊ីត (a_n) ។

ស៊ីត (b_n) : 1 4 9 16 25... នោះ $b_n = n^2$ ។

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n$

នោះ $a_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n + 1$ ។

ចំពោះ $n = 1$, $a_1 = 1$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n + 1$ ។

របៀបទី 2 n : 1 2 3 4 5 6...

ស៊ីត (a_n) : 1 2 6 15 31 56...

ផលសងលំដាប់ 1 : 1 4 9 16 25...

ផលសងលំដាប់ 2 : 3 5 7 9

តាង a_n ជាតួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។ ស៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស៊ីត (a_n) ដែលមានតួទី n នៃស៊ីតគឺ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ តាង c_n ជាផលសងតួនៃស៊ីត (b_n) ហៅថា ផលសងលំដាប់ទី 2 ។ គេបានស៊ីត $(c_n) : 3, 5, 7, 9, \ldots$ ។ ស៊ីត (c_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 3 និងផលសងរួមស្មើ 2 និង $c_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$ ។

ចំពោះ $n \ge 2$ គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k(n-1) = n + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = n^2$$ នោះ $b_n = n^2$ ។

ចំពោះ $n = 1$, $b_1 = 1$ ពិត ។ ដូចនេះ $b_n = n^2$ ។

ចំពោះ $n \ge 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n$

នោះ $a_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n + 1$ ។

ចំពោះ $n = 1$, $a_1 = 1$ ពិត

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n + 1$ ។

ជាទូទៅ គេមានស៊ីត (a_n) ។

ស៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ហៅថាផលសងលំដាប់ 1 នៃស៊ីត (a_n) ដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \ge 2$ ។

ស៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ 2 នៃស៊ីត (a_n) គឺជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ដែលមានតួទី n នៃស៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ ចំពោះ $n \ge 2$ ។

លំហាត់គំរូ ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត 4, 18, 48, 100, 180, 294,... ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ ក. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត 4, 18, 48, 100, 180, 294,...

តាង a_n ជាតួទី n នៃស៊ីតដែលគេឱ្យ (a_n)

ស៊ីត (b_n) ជាផលសងស៊ីតលំដាប់ 1 នៃស៊ីត (a_n) ដែលមានតួ b_n នៃស៊ីតកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ ស៊ីត (b_n) : 14, 30, 52, 80, 114,... ។

តាងស៊ីត (c_n) ជាផលសងស៊ីតលំដាប់ 1 នៃស៊ីត (b_n) ដែលមានតួ c_n ជាតួទី n នៃស៊ីតកំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបានស៊ីត (c_n) : 16, 22, 28, 34, ... ។

ស្វ៊ីត (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 16 និងផលសងរួមស្មើ 6

$$c_n = 16+6(n-1) = 16+6n-6 = 6n+10$$

ចំពោះ $n \ge 2$ គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 14 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+10)$

$$= 14 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + 10(n-1) = 14 + 6\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + 10(n-1) = 3n^2+7n+4$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $b_1 = 4+7+3 = 14$ ពិត ។ ដូចនេះ $b_n = 3n^2+7n+4$ ។

ចំពោះ $n \ge 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+7k+4)$

$$= 4 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 7\sum_{k=1}^{n-1} k + 4(n-1)$$

$$= 4 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 7\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 4n - 4$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(7n+2n^2-n)+4n = (n-1)(3n+n^2)+4n = n^3+2n^2+n$$

ដូចនេះ $a_n = n^3+2n^2+n$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n)

តាង S_n ជាផលបូកនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{4}n^2(1+n)^2 + 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(3n+3n^2+4+8n+6)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+10)$$

ចំពោះ $n = 1$, $a_1 =$ ពិត

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+10)$

ប្រតិបត្តិ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត 1, 2, 5, 12, 27, 58, 121,... ។

លំហាត់

1. សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ :

ក. $1+2+3+\ldots+100$ ខ. $1+4+9+16+\ldots+484$

គ. $1+8+27+64+\ldots+3375$ ឃ. $1\times3+2\times4+3\times5+\ldots+20\times22$

2. សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូកដោយមិនប្រើនិមិត្តសញ្ញា Σ :

ក. $\sum_{k=1}^{6} k$ ខ. $\sum_{k=1}^{5} k^2$ គ. $\sum_{k=4}^{9} (3k-1)$ ឃ. $\sum_{k=2}^{7} (-1)^k k$

3. គណនា ក. $\sum_{k=1}^{11} k^2$ ខ. $\sum_{k=1}^{24} k^2$ គ. $\sum_{k=12}^{24} k^2$

4. គណនា ក. $\sum_{k=1}^{24} k^3$ ខ. $\sum_{k=1}^{15} k^3$ គ. $\sum_{k=16}^{24} k^3$

5. ក. សម្រួលកន្សោម $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

ខ. ដោយប្រើចម្លើយ ក. គណនាផលបូក $1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+28\times29$

6. ក. សម្រួលកន្សោម $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

ខ. ដោយប្រើចម្លើយ ក. គណនាផលបូក $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots+20\times21\times22$

7. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1, 2, 5, 10, 17,\ldots$ ។

ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

8. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1, 5, 14, 30, 55, 91,\ldots$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

9. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : p, q, p, q, p, q,\ldots$ ។

មេរៀនទី

2 ទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត

1. កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ

វត្ថុបំណង

- កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ
- កំណត់តួទី n តាមទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n
- កំណត់តួទូទៅនៃទំនាក់ទំនងតួក្នុងទម្រង់ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n = 0$

គេបានសិក្សារួចមកហើយនូវទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីតនព្វន្ត និងស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ចំពោះស៊ីតនព្វន្ត $a_{n+1} = a_n + d$, d ជាផលសងរួម ។

ចំពោះស៊ីតធរណីមាត្រ $a_{n+1} = a_n \times q$, q ជាផលធៀបរួម ។

តទៅទៀតគេនឹងសិក្សាអំពីទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីតផ្សេងៗទៀតដោយកំណត់រកតួទី n នៃស៊ីតនោះ ។

លំហាត់គំរូ 1 កំណត់តួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1+4a_n$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី 1 គេមាន $a_1 = 1$ ពី $a_{n+1} = 1+4a_n$ គេអាចកំណត់

$a_2 = 1+4a_1 = 1+4$

$a_3 = 1+4a_2 = 1+4\times(1+4) = 1+4+4^2$

$a_4 = 1+4a_2 = 1+4\times(1+4+4^2) = 1+4+4^2+4^3$

....

នោះ $a_n = 1+4+4^2+4^3+\ldots+4^{n-1}$

គេបាន $a_n = 1+4+4^2+4^3+\ldots+4^{n-1} = \dfrac{1\times(4^n-1)}{4-1} = \dfrac{4^n-1}{3}$ ។

ដូចនេះ តួទី n នៃស៊ីត (a_n) គឺ $a_n = \dfrac{4^n-1}{3}$ ។

របៀបទី 2 ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $a_{n+1} = 1+4a_n$, $a_n = 1+4a_{n-1}$

នោះ $a_{n+1} - a_n = 1 + 4a_n - (1 + 4a_{n-1}) = 4(a_n - a_{n-1})$ (1)

បើគេតាង $b_n = a_{n+1} - a_n$ នោះពី (1) គេបាន $b_n = 4b_{n-1} \Rightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} = 4$ នោះស្វ៊ីត (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 4 និងមានតួទី 1 និងតួទី n គឺ

$b_1 = a_2 - a_1 = 1 + 4 \times 1 - 1 = 4$, $b_n = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$

ស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងស្វ៊ីត (a_n) តាមរូបមន្ត ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 1 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{1 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3} \text{ ។}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$ ។

របៀបទី 3 គេប្រើស្វ៊ីតជំនួយ (r_n) រួចធ្វើផលដក $a_{n+1} - r_n$

គេឱ្យ $r_n = -\frac{1}{3}$ គេបាន $a_{n+1} + \frac{1}{3} = 1 + 4a_n + \frac{1}{3} = 4a_n + \frac{4}{3} = 4 \cdot \left(a_n + \frac{1}{3}\right)$

តាង $V_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{3}$ ហើយ $V_n = a_n + \frac{1}{3}$ (1) ។

គេបាន $V_{n+1} = 4V_n$ ហើយ $V_n = 4^{n-1} \cdot V_1$

គេអាចគណនា V_1 តាមទំនាក់ទំនង (1) គឺ $V_1 = a_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

គេបាន $V_n = 4^{n-1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4^n$ គេអាចគណនា a_n តាមទំនាក់ទំនង (1)

គឺ $a_n = V_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} = \frac{4^n - 1}{3}$

សំគាល់ ដើម្បីកំណត់រកតម្លៃនៃស្វ៊ីតជំនួយ (r_n) គេតាង $r_n = \alpha \cdot n + \beta$ (α, β ថេរ) ជាស្វ៊ីតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_{n+1} = 1 + 4a_n$ ។ ជំនួសស្វ៊ីតជំនួយទៅក្នុងស្វ៊ីត (a_n) គេបានសមីការដែលអាចឱ្យគេកំណត់រក α និង β

$$a_{n+1} = 1 + 4a_n \Leftrightarrow \alpha \cdot (n+1) + \beta = 1 + 4 \cdot (\alpha \cdot n + \beta) \text{ ឬ } 3 \cdot \alpha \cdot n + 3 \cdot \beta - \alpha + 1 = 0$$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 3 \cdot \alpha = 0 \\ 3 \cdot \beta - \alpha + 1 = 0 \end{cases}$ ហើយ $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{3}$ ។

ហេតុនេះ $r_n = -\frac{1}{3}$ ដូចនេះស្វ៊ីត (r_n) ហៅថាស្វ៊ីតជំនួយ ។

ជាទូទៅ គេប្រើស្វ៊ីតជំនួយ (r_n) ដែល $r_n = \alpha \cdot n + \beta$($\alpha, \beta$ ថេរ) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងនៃស្វ៊ីត ។ ក្នុងករណីនេះ គេជំនួស r_n ក្នុងទំនាក់ទំនងនៃស្វ៊ីត រួចគណនាតម្លៃ α និង β បន្ទាប់មកកំណត់បានស្វ៊ីត (r_n) គេនឹងធ្វើផលសង $a_{n+1} - r_n$

លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$ ។ កំណត់តួទី n ។

ចម្លើយ តាង(r_n) ដែល $r_n = \alpha n + \beta$ ជាស៊ីតជំនួយ

គេបាន $a_{n+1} = 2a_n - n + 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot (n+1) + \beta = 2(\alpha \cdot n + \beta) - n + 1$

$n \cdot (\alpha - 1) + \beta - \alpha + 1 = 0$ គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - \alpha + 1 = 0 \end{cases}$ ហើយ $\alpha = 1$, $\beta = 0$

នោះ $r_n = n$ ធ្វើផលសងរវាងស៊ីត $a_{n+1} - r_n$

$a_{n+1} - n = 2a_n - n + 1 - n = 2a_n - 2n + 1$, $a_{n+1} - (n+1) = 2(a_n - n)$

តាង $V_n = a_n - n$ (1) នោះ $V_{n+1} = a_{n+1} - (n+1)$ គេបាន $V_{n+1} = 2 \cdot V_n$

ហើយ $V_n = 2^{n-1} \cdot V_1$

គេគណនា V_1 តាម $V_n = a_n - n$, $V_1 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2$, $V_n = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$

គេអាចគណនា V_n តាម (1) គឺ $V_n = a_n - n$ នោះ $a_n = V_n + n = 2^n + n$ ។

ដូចនេះ $a_n = 2^n + n$ ។

ប្រតិបត្តិ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} - n$ ។

2. ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n

ឧទាហរណ៍ គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) គឺ $S_n = n^2 + n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

ចម្លើយ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n)

គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) គឺ

$S_n = n^2 + n \Leftrightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = n^2 + n$

$\Rightarrow S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1)$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n = n^2 + n - [(n-1)^2 + (n-1)]$

$a_n = n^2 + n - (n-1)^2 - n + 1 = n^2 + n - n^2 + 2n - 1 - n + 1 = 2n$ នោះ $a_n = 2n$ ។

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $S_1 = 1^2 + 1 = 2$ ពិត ព្រោះ $(S_1 = a_1 = 2)$ ។ ដូចនេះ $a_n = 2n$ ។

ឧបមាថា S_n គឺជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) នោះ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ និង $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}$ ។

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $S_1 = a_1$ ។

ជាទូទៅ ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ និង $S_1 = a_1$

សំគាល់ S_n និង S_{n+1} មានភាពចាំបាច់ដើម្បីរក a_{n+1} គឺ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ។

លំហាត់គំរូ គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $S_n = n^3 + 2n$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ចម្លើយ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ

$S_n = n^3 + 2n \Rightarrow S_{n-1} = (n-1)^3 + 2(n-1)$

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 + 2n - (n-1)^3 - 2(n-1)$

$= n^3 + 2n - 2n + 2 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - 3n + 3$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = 3n^2 - 3n + 3$

ប្រតិបត្តិ គេមាន $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} និង a_n ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

3. ទំនាក់ទំនងកំណើនក្នុងទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

ឧទាហរណ៍ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ដែល

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n (n = 1, 2, \ldots)$ ។

គេស្គាល់ a_1 , a_2 គេអាចគណនាតួ a_3 និងតួបន្តបន្ទាប់ដើម្បីពិនិត្យមើលលំនាំគំរូ

$a_3 = 3 \cdot a_2 - 2 \cdot a_1 = 9 - 2 = 7$

$a_4 = 3 \cdot a_3 - 2 \cdot a_2 = 21 - 6 = 15$

$a_5 = 3 \cdot a_4 - 2 \cdot a_3 = 45 - 14 = 31$

$a_6 = 3 \cdot a_5 - 2 \cdot a_4 = 93 - 30 = 63$

គណនាផលសងតួនៃស្វ៊ីតនេះ

$a_2 - a_1 = 2$

$a_3 - a_2 = 2^2$

$a_4 - a_3 = 2^3$

$\dots\dots\dots\dots\dots$

$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$

$a_n - a_1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$ នោះ $a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$

ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន 1 ជាតួទីមួយ និងផលធៀបរួមស្មើនឹង 2

គេបាន $a_n = 2^n - 1$ ។

ជាទូទៅគេអាចគណនា a_n តាមវិធីខាងក្រោម :

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n = a_n - 2a_{n-1}$

$= a_{n-1} - 2a_{n-2} = \dots = a_2 - 2a_1 = 3 - 2\times 1 = 1$

នោះ $a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n = 1$ (1) ។

ម្យ៉ាងទៀត $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n$ នោះ (b_n) ឬ $(a_{n+1} - a_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 2 និងតួទីមួយស្មើ $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ ហើយ $b_n = 2\cdot(2)^{n-1} = 2^n$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$-\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 1 & (1) \\ a_{n+1} - a_n = 2^n & (2) \end{cases}$$
$$\overline{\quad -a_n = 1 - 2^n \quad}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = 2^n - 1$ ។

គេបានរបៀបរកតួទូទៅតាមទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម :

ជាទូទៅ របៀបដោះស្រាយ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

បើទំនាក់ទំនងនៃស្វ៊ីត (a_n) មានទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

គេពិចារណាពីរចំនួន α និង β ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$ ។

នោះគេបាន $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះអាចបំលែងតាមរបៀបពីរយ៉ាងដូចខាងក្រោម :

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$

ទំនាក់ទំនងទាំង 2 ខាងលើនេះ គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រអាចឱ្យគេរក a_n បាន ។

គេអាចរក α និង β ដោយដោះស្រាយសមីការ $x^2+px+q=0$ ព្រោះគេស្គាល់ផលបូក និងផលគុណវា ។

សមីការ $x^2+px+q=0$ ហៅថា " **សមីការសំគាល់នៃ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$** "

លំហាត់គំរូ ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$, $a_2=13$, $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ $(n=1,\ 2\ldots)$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ចម្លើយ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

$$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n \Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$$

សមីការសំគាល់ : $x^2-x-6=0$ នោះឫសសមីការ $x=3$ ឬ $x=-2$ គេបាន

$$\begin{cases} a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n) & (i) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n) & (ii) \end{cases}$$

(i) $\quad a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$

តាង $b_n=a_{n+1}+2a_n$ នោះស្វ៊ីត (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង 3 ហើយតួទី 1 គឺ $b_1=a_2+2a_1=13+2\times 1=15$ និង $b_n=15\cdot(3)^{n-1}$

គេបាន $a_{n+1}+2a_n=15\cdot(3)^{n-1}$ $\quad (1)$

(ii) $\quad a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$

តាង $c_n=a_{n+1}-3a_n$ នោះស្វ៊ីត (c_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើនឹង -2 ហើយតួទី 1 គឺ $c_1=a_2-3a_1=13-3\times 1=10$ និង $c_n=10\cdot(-2)^{n-1}$

គេបាន $a_{n+1}-3a_n=10\cdot(-2)^{n-1}$ $\quad (2)$ ។

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$-\begin{cases} a_{n+1}+2a_n=15\cdot(3)^{n-1} & (1) \\ a_{n+1}-3a_n=10\cdot(-2)^{n-1} & (2) \end{cases}$$

$$5a_n=15(3)^{n-1}-10(-2)^{n-1}$$

$$a_n=3\times 3^{n-1}-2\times(-2)^{n-1}=3^n+(-2)^n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n=3^n+(-2)^n$

ប្រតិបត្តិ ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង $a_1=0$, $a_2=3$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

លំហាត់

1. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម ៖

ក. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 4$

ខ. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n - 2n$ ។

កំណត់តួទី 4 នៃស្វ៊ីតនេះ ។

2. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ។ កំណត់តួទី 7 នៃស្វ៊ីតនេះ ។

3. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1$, $a_{n+1} = pa_n + q$ ។

គណនាតម្លៃ p និង q បើគេដឹងតួទី 3 ស្មើ 6 និងតួទី 5 ស្មើ 86 ។

4. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម ៖

ក. $a_1 = 1$, $3a_{n+1} = 2a_n + 3$ $(n = 1, 2, \dots)$

ខ. $a_1 = 1$, $3a_{n+1} = 3a_n + 4$ $(n = 1, 2, \dots)$

គ. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$ $(n = 1, 2, \dots)$

5. គេមានស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}(n = 1, 2, 3, \dots)$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n \neq 3$ ចំពោះគ្រប់ n ។

ខ. យក $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ និងកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (b_n) ។ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

6. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

បើ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n = 4 - a_n - \dfrac{1}{2^{n-2}}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} និង a_n ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

7. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ (a_n) : $a_1 = 1$, $S_n = a_{n+1} + n^2$ $(n \geq 1)$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

8. គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) ហើយ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n = \frac{n}{n-1} \cdot a_n$ $n \geq 2$ ។

ក. បញ្ជាក់រក a_n $(n \geq 3)$ អនុគមន៍នឹង n និង a_{n-1} ។

ខ. បញ្ជាក់រក S_n $(n \geq 2)$ អនុគមន៍នឹង n និង S_{n-1} ។

គ. ឧបមាថា $a_1 = 1$ រកតួទី n នៃស៊ីត S_n ដែល $n \geq 1$ ។

9. គេមានស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$(a_n) : a_1 = 2 \ , \ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ។

ក. តាង $b_n = \frac{1}{a_n}$ ។ កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង b_n និង b_{n+1} ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

មេរៀនទី 3

វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

1. គោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

វត្ថុបំណង

- កំណត់វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា
- ការប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា
- ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

គេគ្រាន់តែសង្កេតមើលឧទាហរណ៍ខ្លះៗនៃផលបូកចំនួនសេស

ផលបូក 1 តួតាងដោយ $P(1) = 1 = 1^2$

ផលបូក 2 តួតាងដោយ $P(2) = 1+3 = 2^2$

ផលបូក 3 តួតាងដោយ $P(3) = 1+3+5 = 3^2$

គេអាចទាញបានផលបូក n តួតាងដោយ

$P(n) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

បន្ទាប់ពីបានរូបមន្តនេះមក គេត្រូវបញ្ជាក់ថារូបមន្ត $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ n ។ ក្នុងករណីនេះគេផ្តើមផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(n)$ ដោយឱ្យ $n = 1$ ។

បើ $n = 1$ $1 = 1^2$ ហេតុនេះ $P(1)$ ពិត

ឧបមាថា $P(n)$ ពិត ចំពោះតម្លៃ n ណាមួយ

គេត្រូវស្រាយថា $P(n)$ ពិតនាំឱ្យបាន $P(n+1)$ ក៏ពិតដែរ

បើ $P(n)$ ពិត គេបាន $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n+1)$ ពិតលុះត្រាតែគេបាន $P(n+1) = (n+1)^2$

របៀបស្រាយបញ្ជាក់

គេដឹងថា $P(n+1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1)+[2(n+1)-1] = n^2+(2n+2-1)$

$$= n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

$P(n+1)$ ពិត ។

ដូចនេះ $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ។

គោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

> **វិចារនុមានរួម** $P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n
>
> ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ គេត្រូវ :
>
> 1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$
> 2. ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ n
> 3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតនាំឱ្យបាន $P(n+1)$ ពិត ។

លំហាត់គំរូ 1 ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n\times(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ចម្លើយ ចំពោះ $n = 1$

អង្គខាងឆ្វេង $1\times 2 = 2$ អង្គខាងស្តាំ $\frac{1}{3}\times 1\times(1+1)(1+2) = 2$

នោះអង្គខាងឆ្វេង = អង្គខាងស្តាំ

ដូចនេះ ចំពោះ $n = 1$ សមភាពពិត ។

ឧបមាថា សមភាពពិតចំពោះ $n = k$ គេបាន

$$1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + k\times(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

បង្ហាញថាសមភាពពិតចំពោះ $n = k$ នាំឱ្យបានសមភាពពិតចំពោះ $n = k+1$

$$1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

គេមាន $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + k\times(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

ថែម $(k+1)(k+2)$ លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ គេបាន

$$1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + k\times(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k + 1\right) = (k+1)(k+2)\left(\frac{k+3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ សមភាពពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$

ដូចនេះ $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n\times(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)(n = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$

លំហាត់គំរូ 2 ចំពោះ $h>0$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 2$ បង្ហាញថា $(1+h)^n>1+nh$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

ចម្លើយ ចំពោះ $n = 2$

គេបាន $(1+h)^2 = 1+2h+h^2>1+2h$ ព្រោះ $h^2\geq 0$

ដូចនេះ វិសមភាពនេះពិត ចំពោះ $n = 2$

ឧបមាថាវិសមភាពនេះពិត ចំពោះ $n = k$ $(k\geq 2)$ នោះ $(1+h)^k>1+kh$ ពិត

គេនឹងបង្ហាញថាវាពិតដល់ $n = k+1(k\geq 2)$ គឺ $(1+h)^{k+1}>1+(k+1)\times h$ (1)

គេមាន $(1+h)^k>1+kh$ ដោយ $h>0$ នោះ $1+h>0$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) និង $1+h>0$

គេបាន $(1+h)^k(1+h)>(1+kh)(1+h)$

$(1+h)^{k+1}>1+kh+h+kh^2 = 1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$ ព្រោះ $kh^2\geq 0$ ។

ដូចនេះ វិសមភាព $(1+h)^2>1+nh$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។

លំហាត់គំរូ 3 ស្រាយបញ្ជាក់ថា n^3+2n ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n\in N$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

ចម្លើយ ចំពោះ $n = 0$ គេបាន 0 ជាពហុគុណនៃ 3 ពិត ។

ឧបមាថាសមភាពពិតចំពោះ $n = k$

គេបាន k^3+2k ជាពហុគុណនៃ 3 ពិត

យើងបាន $k^3+2k = 3q$

គេបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $(k+1)^3+2(k+1)$ ជាពហុគុណនៃ 3 ។

គេបាន $(k+1)^3+2(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+2k+2$

$$= k^3+3k^2+5k+3 = (k^3+2k)+3\times(k^2+k+1)$$

$$= 3q+3(k^2+k+1) = 3(q+k^2+k+1)$$

មានន័យថា $(k+1)^3+2(k+1)$ ជាពហុគុណនៃ 3

ដូចនេះ n^3+2n ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\ldots+n)\geq n^2$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

2. ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

ពេលគេពន្លាតស្វ័យគុណនៃទ្វេធា គេបានពហុធា ឬស៊េរីមួយ ។ វាមិនមែនជាស៊ីតធរណីមាត្រ ឬស៊ីតនព្វន្តឡើយ ។ តែវាមានលំនាំគំរូមួយច្បាស់លាស់ ។ ក្នុងមេរៀននេះគេនឹងសិក្សារូបមន្តពន្លាតនៃស្វ័យគុណនៃទ្វេធាឱ្យបានឆាប់រហ័ស ។ ជាដំបូងពិនិត្យមើលពន្លាតនៃកន្សោម $(x+y)^n$ ចំពោះតម្លៃខ្លះនៃ n ។

ឧទាហរណ៍ 1

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = 1x+1y$$

$$(x+y)^2 = 1x^2+2xy+1y^2$$

$$(x+y)^3 = 1x^3+3x^2y^1+3xy^2+1y^4$$

$$(x+y)^4 = 1x^4+4x^3y^1+6x^2y^2+4xy^3+1y^3$$

$$(x+y)^5 = 1x^5+5x^4y^1+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+1y^5$$

....

ក្នុងជួរដេកនីមួយៗកើតមានលំនាំគំរូដូចៗគ្នា ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើ គេសង្កេតក្នុងជួរដេកនីមួយៗនៃពន្លាតកន្សោម $(x+y)^n$ ឃើញថា ៖

- ពន្លាតទ្វេធានីមួយៗជាពហុធាដែលមាន $(n+1)$ តួ ។
- ក្នុងពន្លាតទ្វេធានីមួយៗស្វ័យគុណនៃ x ចុះ 1 ដឺក្រេជាបន្តបន្ទាប់ និងស្វ័យគុណនៃ y កើន 1 ដឺក្រេជាបន្តបន្ទាប់បើគេអានពីឆ្វេងទៅស្តាំ ។
- ផលបូកនៃស្វ័យគុណក្នុងតួនីមួយៗនៃពហុធាស្មើ n ។

- លេខមេគុណចាប់ផ្ដើមនិងចុងក្រោយគឺ 1 ដូចគ្នា ហើយផលបូកនៃលេខមេគុណពីរតួជាប់គ្នា នៃពន្លាត $(x+y)^3$ ជាលេខមេគុណនៃពន្លាត $(x+y)^4$... ។

1 3 3 1 លេខមេគុណនៃ $(x+y)^3$

1 4 6 4 1 លេខមេគុណនៃ $(x+y)^4$

ឬលេខមេគុណនៃតួផ្សេងទៀតកំណត់បានអាស្រ័យនឹងលេខមេគុណនៃតួបន្ទាប់ខាងមុខគឺ

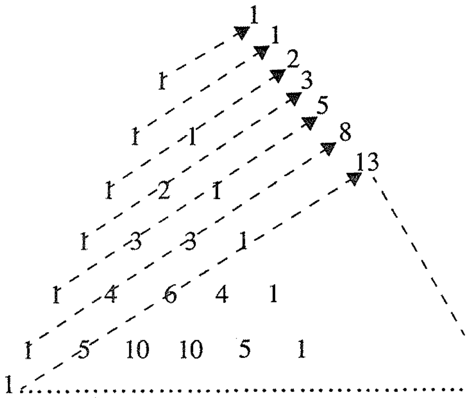
$$\text{លេខមេគុណនៃតួទី } k+1 = \frac{(\text{លេខមេគុណនៃតួទី k}) \times (\text{ស្វ័យគុណនៃ } x \text{ ក្នុងតួទី k})}{k}$$

ឧទាហរណ៍ 2 $(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$

$$\frac{1\times 5}{1} \quad \frac{5\times 4}{2} \quad \frac{10\times 3}{3} \quad \frac{10\times 2}{4} \quad \frac{5\times 1}{5}$$

ពីឧទាហរណ៍ 1 បើគេផ្ដាច់យកតែលេខមេគុណនិងតម្រៀបលេខទាំងនេះជារាងត្រីកោណ គេឃើញមានលំនាំគំរូជាច្រើន ។ គេបាន

តម្រៀបលេខមេគុណទាំងនេះជារាងត្រីកោណហៅថា ត្រីកោណប៉ាស្កាល់ និងមានសារៈសំខាន់ណាស់សម្រាប់រកលេខមេគុណក្នុងពន្លាតទ្វេធា $(x+y)^n$ ដែលមានស្វ័យគុណតូចតែវាពិបាកអនុវត្តខ្លាំងណាស់ចំពោះការពន្លាតទ្វេធា $(x+y)^n$ ដែលមានស្វ័យគុណធំ ។



ចំណែកឯស៊ីត 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ហៅថាស៊ីត Fibonacci ។

លំហាត់គំរូ ប្រើត្រីកោណប៉ាស្កាល់ពន្លាតកន្សោម $(x+y)^5$ ។

ចម្លើយ ដោយប្រើជួរដេកទីប្រាំនៃត្រីកោណប៉ាស្កាល់ គេបានលេខមេគុណ

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

គេបាន $(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$ ។

PROEUS DARA

ប្រតិបត្តិ ប្រើត្រីកោណប៉ាស្កាល់ពន្លាតកន្សោម $(x+y)^6$ ។

គេចាំបាច់កំណត់គំរូតួទូទៅនៃពន្លាត $(x+y)^n$ គឺ

$$(x+y)^n = 1x^n + \,?\,x^{n-1}y^1 + \,?\,x^{n-2}y^2 + \ldots + \,?\,x^{n-r}y^r + \ldots + 1y^n$$

តួ 1 2 3 ... $(r+1)$ ... $(n+1)$

លេខមេគុណ $1 \quad \dfrac{1\times n}{1} \quad \dfrac{n(n-1)}{1\times 2} \quad \ldots \quad \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times r} \quad \ldots 1$

$$= 1x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y^1 + \frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times r}x^{n-r}y^r + \ldots + 1y^n$$

ដូចនេះ

$$(x+y)^n = 1x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y^1 + \frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times r}x^{n-r}y^r + \ldots + 1y^n$$

ពីត្រីកោណប៉ាស្កាល់ គេឃើញថាលេខមេគុណនៃទ្វេធាជាចំនួនដែលរៀបឆ្លុះគ្នា ហើយគេដឹងថា

$$1 = \frac{n!}{n!0!} = C(n,0) = C(n,n)$$

$$\frac{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = C(n,1) = C(n,n-1)$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{n\,!}{(n-2)!\cdot 2!} = C(n;2) = C(n,n-2)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = C(n,3) = C(n,n-3)$$

....

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r) = C(n,n-r)$$

ចំនួនថេរ $C(n,0)$, $C(n,1)$, $C(n,2)$, ... , $C(n,n)$ ហៅថាលេខមេគុណនៃទ្វេធា $(x+y)^n$

គេបាន

$$(x+y)^n = 1x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y^1 + \frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times r}x^{n-r}y^r + \ldots + 1y^n$$

$$C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y^1 + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \ldots + C(n,r)x^{n-r}y^r + \ldots + C(n,n)y^n)$$

ហៅថាទ្រឹស្តីបទទ្វេធា ។

ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^{n-r}y^r = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y^1 + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \ldots + C(n,n)y^n$$

លំហាត់គំរូ ដោយប្រើជួរដេកទី 6 នៃត្រីកោណប៉ាស្កាល់គណនាលេខមេគុណនៃទ្វេធា

$C(6,0)$, $C(6,1)$, $C(6,2)$, $C(6,3)$, $C(6,4)$, $C(6,5)$, $C(6,6)$

ចម្លើយ

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

$C(6,0)$ $C(6,1)$ $C(6,2)$ $C(6,3)$ $C(6,4)$ $C(6,5)$ $C(6,6)$

ប្រតិបត្តិ 1. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធាចូរពន្លាតកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក. $(1+3x)^4$ ខ. $(2x-y)^5$ គ. $\left(a+\frac{1}{a^2}\right)^6$ ឃ. $(1+x)^n$

2. កំណត់តួទី 4 នៃពន្លាតទ្វេធា $(x+y)^{13}$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។
- ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយ (ហៅថាផលសងរួម ឬរេសុងដែល $d = U_{n+1}-U_n$) ។
- រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $U_n = U_1+(n-1)\times d$
- ផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $S_n = \frac{(U_1+U_n)\times n}{2}$ ។
- ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q ដែល $q\neq 0$ ។ ចំនួនថេរ q នេះហៅថាផលធៀបរួម ឬរេសុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។
- រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $U_n = U_1\times q^{n-1}$
- ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $S_n = \frac{U_1(q^n-1)}{q-1}$ ដែល $q\neq 1$
  ផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រមិនកំណត់ $S_n = \frac{U_1}{1-q}$ ចំពោះ $|q|<1$
- រូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តមានលំដាប់ខ្ពស់

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

- ស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងស្វ៊ីតលំដាប់ 1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$, $n \ge 2$ ។
- ស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងស្វ៊ីតលំដាប់ 2 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$, $n \ge 2$ ។
- ហើយស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងស្វ៊ីតលំដាប់ 1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$, $n \ge 2$ ។
- ទំនាក់ទំនងកំណើនគឺជាច្បាប់ដែលកំណត់តួ a_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃតួ a_n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។
- ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $a_{k+1} = pa_k + q$ $(p,\ q$ ថេរ$)$

  បំលែងទៅជា $a_{k+1} - c = p(a_k - c)$ ដែលមានសមីការសំគាល់ $c = pc + q$ ។
- ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $a_{n+1} = a_n + pn$ នោះផលសងស្វ៊ីត (b_n) ដែល

  $b_n = a_{n+1} - a_n = pn$ និង $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} pk$
- ចំពោះ $n \ge 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ និង $S_1 = a_1$
- ទំនាក់ទំនងកំណើននៃស្វ៊ីត (a_n) ទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ មានសមីការសំគាល់ $x^2 + px + q = 0$ ដែលឫស α និង β បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$ នោះ

  គេបាន $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ អាចបំលែងជា

  $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

  $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ ទំនាក់ទំនងទាំង 2 នេះគឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។
- សំណើ $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ហើយសំណើខាងក្រោម (i) និង (ii) ពិតគឺ :

  (i) $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$

  (ii) ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n = k$ រួចបង្ហាញថា $P(n+1)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n = k + 1$ ។

ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^{n-r}y^r$$

$$= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y^1 + \ldots + C(n,r)x^{n-r}y^r + \ldots + C(n,n)y^n$$

លំហាត់

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$; $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

2. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

   ក. ចំនួន 4^n+2 ចែកដាច់នឹង 3 ។

   ខ. ចំនួន $3^{n+3}-4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

3. គេមានស៊ីត $(U_n)_{n\in IN}$ កំណត់ដោយ $U_{n+1} = \sqrt{U_n+2}$ និង $U_0 = 0$ ។ បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា

   ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, $U_n \leq 2$ ។

   ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, $U_n \leq U_{n+1}$ ។

4. បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \geq 0$ ។

5. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា ចូរពន្លាតកន្សោមខាងក្រោម :

   ក. $(3x-1)^4$

   ខ. $(2x+y)^6$

   គ. $(a+b)^6$

6. សរសេរពន្លាតកន្សោមខាងក្រោមដោយប្រើ Σ :

   ក. $(x-y)^5$

   ខ. $(2x+y)^6$

   គ. $(a+b)^{12}$

លំហាត់ជំពូក

1. សរសេរបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា $S_{10} = 210$ និង $S_{20} = 820$ ។

2. គេដឹងថាផលបូកតួទី 1 និងតួទី 4 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 2 និងផលបូកការេរបស់វាស្មើនឹង 20 ។ គណនាផលបូកប្រាំបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

3. គេមាន S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូងនិង n តួដំបូងរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}(n \neq m)$ ។ តាងតួទី m គឺ u_m និងតួទី n គឺ u_n ។ បង្ហាញថា $\dfrac{u_m}{u_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$ ។

4. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $12,\ 4,\ \frac{4}{3},\ \ldots$ ។

   ក. គណនាតួទី 10

   ខ. តើចំនួន $\dfrac{4}{729}$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

   គ. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

5. គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេដឹងថា $U_n = 2(3)^{n-1}$ ។ គណនា S_n ។

6. គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} + nx^{x-1}$ ។

7. គណនាតួទី 1 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមាន $q = \dfrac{3}{5}$ និង $S_\infty = 40$ ។

8. គេឱ្យបីចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ គណនាចំនួនទាំងនោះបើគេដឹងថាផលគុណនៃចំនួនទាំងនោះស្មើនឹង 3375 ហើយផលបូកវាស្មើនឹង 93 ។

9. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម

   ក. ស្វ៊ីត (a_n) : $1\ ,\ \dfrac{1}{1+2}\ ,\ \dfrac{1}{1+2+3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{1+2+3+4+\ldots+n}$

   ខ. ស្វ៊ីត (b_n) : $\dfrac{1}{(1\times 3)^2}\ ,\ \dfrac{2}{(3\times 5)^2}\ ,\ \dfrac{3}{(5\times 7)^2},\ \ldots,\ \dfrac{n}{[(2n-1)(2n+1)]^2}$

10. ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1,\ 2,\ 6,\ 15,\ 31,\ 56,\ \ldots$

    ខ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

11. ក. គណនា $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2-1)$

    ខ. ដោយប្រើសំណួរ ក. គណនាផលបូក $1 + 7 + 17 + 31 + \ldots + 799$

12. សរសេរផលបូក $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + 298$ ដោយប្រើ Σ ។

13. ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$ ។

14. គេមានស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ $U_{n+1} = 2U_n + 1$ និង $U_0 = 1$ ហើយស្វ៊ីត (V_n) កំណត់ដោយ $V_n = U_n + 1$ ។

ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត (U_n) ។

ឃ. ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គណនាផលបូក $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ ។

15. គេមានស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2}{U_n + 1}$ និង $U_0 = 2$ ។

ក. គណនា U_1 , U_2 , U_3 ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-U_n)}{U_n + 1}$

គ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$ ។

ឃ. ទាញពីសំណួរ ខ. និង គ. ថា $|U_{n+1} - \sqrt{2}| \le \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \times |U_n - \sqrt{2}|$ ។

ង. បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា $|U_n - \sqrt{2}| \le \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \times |\sqrt{2} - U_0|$ ។

16. គេមាន (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + n$

ក. តាង $b_n = 2^n a_n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (b_n) ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

17. ក. សរសេរ $(x^2 - 2y)^7$ ដោយប្រើ Σ

ខ. កំណត់តួទី 6 នៃពន្លាត $(x^2 - 2y)^7$ ។

18. បង្ហាញថាផលបូកនៃលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$ គឺ 2^n ។

19. បង្ហាញថា $C(n,0) + C(n,2) + C(n,4) + \ldots + C(n,n-1)$

$= C(n,1) + C(n,3) + C(n,5) + \ldots + C(n,n) = 2^{n-1}$ ដែល $C(n,0)$, $C(n,1)$

$Cn,2$,... $C(n,n)$ ជាលេខមេគុណក្នុងពន្លាត $(1+x)^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់សេស។

PROEUS DARA

ជំពូក 2

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត

1. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
2. អនុគមន៍លោការីត

នៅក្នុងជំពូកនេះ គេចាប់ផ្ដើមសិក្សាពីបញ្ញត្តិនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ដែលជាមធ្យោបាយសំខាន់សម្រាប់សិក្សាពីបញ្ញត្តិ ក្រាប សមីការនិងវិសមីការលោការីត។ បន្ទាប់ពីទទួលបានបញ្ញត្តិអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត សិស្សអាចយកចំណេះដឹងនិងបំណិនទៅដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាដែលទាក់ទងនឹងការប្រាក់ កំណើនភ្ញៀវទេសចរ កំណើនប្រជាពលរដ្ឋ និងសម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាផ្សេងទៀតដែលជួបប្រទះក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។

មេរៀនទី 1

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1.1 ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ក្នុងតម្រុយតែមួយ

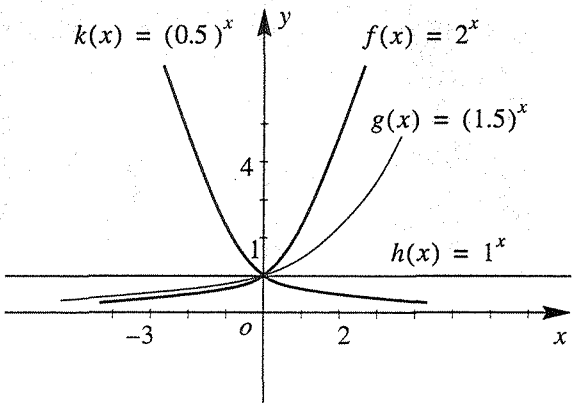
$f(x) = 2^x$, $g(x) = (1.5)^x$

$h(x) = 1^x$, $k(x) = (0.5)^x$

វត្ថុបំណង

- សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- ដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។

x	$y = 1.5^x$
−2	0.44
−1	0.66
0	1
1	1.5
2	2.25



តាមក្រាបយើងសង្កេតឃើញថា គ្រប់ក្រាបរបស់អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល កាត់តាម ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(0, 1)$ ជានិច្ច ។

- បើ $x>0$ នោះ $(1.5)^x<2^x$ ។ ដូចនេះ ក្នុងកាដ្រង់ទី1 ក្រាបនៃអនុគមន៍ $g(x) = (1.5)^x$ ស្ថិតនៅក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = 2^x$ ។
- អនុគមន៍ $h(x) = 1^x$ មានក្រាបជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងនៅពីលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសចំនួន 1 ឯកតា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

PROEUS DARA

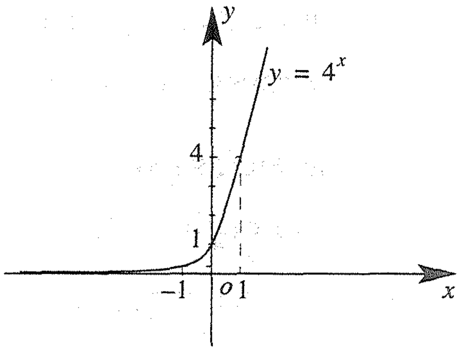
- បើ $x>0$ នោះ $(0.5)^x<1$ ។ ដូចនេះ បើ x យកតម្លៃកើនធំឡើងៗ នោះ $k(x)=0.5^x$ មានតម្លៃចុះតូចទៅៗ ហើយខិតទៅរក 0 ។
- បើ $x<0$ នោះ $(0.5)^x$ មានតម្លៃធំឡើងៗគ្មានកំណត់ ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=a^x$ មានក្រាប :
- បើ $a>1$ ក្រាបនៃ $y=a^x$ កើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ គេថា $y=a^x$ ជាអនុគមន៍កើន
- បើ $0<a<1$ ក្រាបនៃ $y=a^x$ ចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ គេថា $y=a^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- អនុគមន៍ $y=a^x$ វិជ្ជមានជានិច្ច $\forall x\in\mathbb{R}$ បើ a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននិងខុសពី 1
- ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a^x$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $(0,1)$ ជានិច្ច ។

លំហាត់គំរូ សង់ក្រាប ក. $y=4^x$ ខ. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

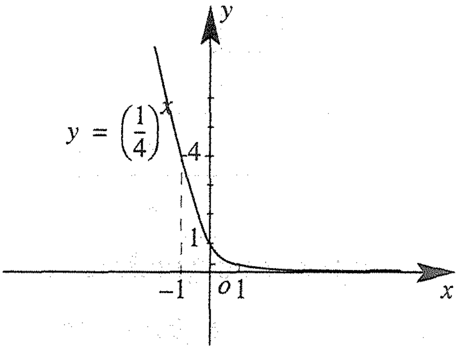
ចម្លើយ ក. តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=4^x$
-2	0.06
-1	0.25
0	1
1	4
2	16



ខ. តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$
-2	16
-1	-1
0	1
1	0.25
2	0.06



ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបអនុគមន៍ ក. $y=10^x$ ខ. $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$

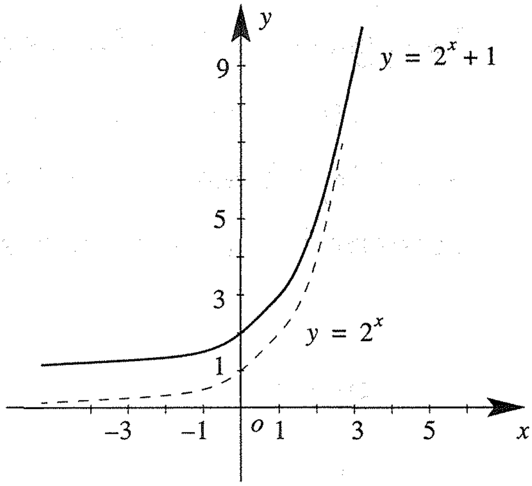
1.2 លក្ខណៈក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ឧទាហរណ៍ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = 2^x + 1$ ខ. $y = 2^{x+1}$ គ. $y = 2^{x-2}$ ឃ. $y = -2^x$

ចម្លើយ **ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍** $y = 2^x + 1$

x	$y = 2^x$	$y = 2^x + 1$
–2	0.25	1.25
–1	0.5	1.50
0	1	2
1	2	3
2	4	5



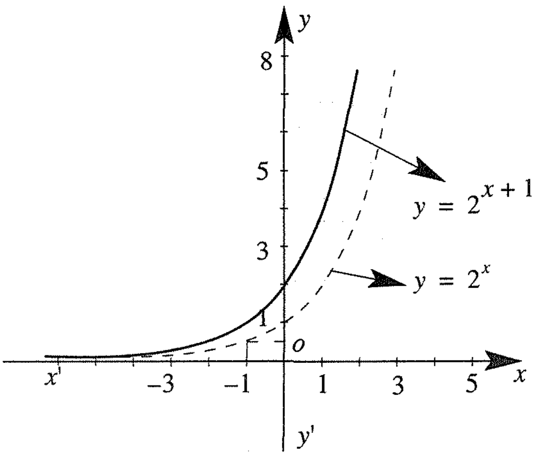
តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា

ដើម្បីសង់ក្រាប $y = 2^x + 1$ ដំបូងគេសង់ក្រាប $y = 2^x$ រួចរំកិល ចំនួនមួយឯកតាឡើងលើស្រប អ័ក្ស (oy) គេបានក្រាប $y = 2^x + 1$ ។

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2^{x+1}$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y = 2^x$	$y = 2^{x+1}$
–2	0.25	0.5
–1	0.5	1
0	1	2
1	2	4
2	4	8

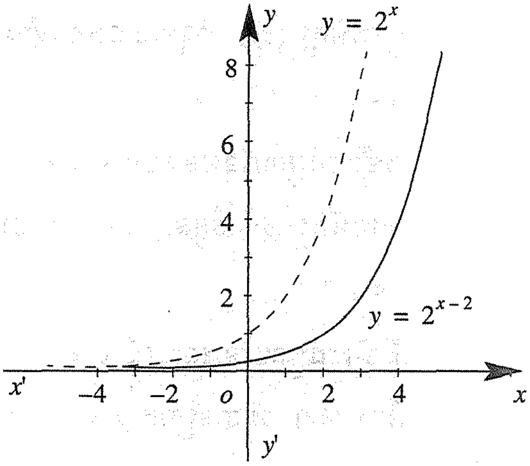


តាមក្រាប គេសង្កេតឃើញថា ដើម្បីសង់ក្រាប $y = 2^{x+1}$ ដំបូងគេសង់ក្រាប $y = 2^x$ រួចរំកិល ចំនួនមួយឯកតាទៅខាងឆ្វេងស្របអ័ក្ស (ox) គេបានក្រាប $y = 2^{x+1}$ ។

គ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2^{x-2}$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y = 2^x$	$y = 2^{x-2}$
–2	0.25	0.06
–1	0.5	0.12
0	1	0.25
1	2	0.5
2	4	1



តាមក្រាប គេសង្កេតឃើញថា

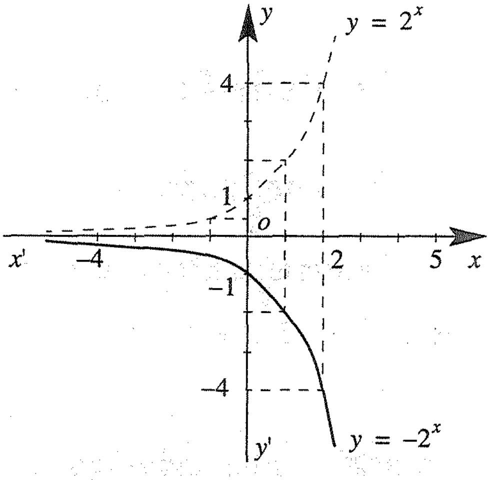
ដើម្បីសង់ក្រាប $y = 2^{x-2}$

ដំបូងគេសង់ក្រាប $y = 2^x$ រួចរំកិលចំនួនពីរឯកតាទៅខាងស្តាំស្របអ័ក្ស (ox) គេបាន
ក្រាប $y = 2^{x-2}$ ។

ង. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -2^x$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y = 2^x$	$y = -2^x$
–2	0.25	–0.25
–1	0.5	–0.5
0	1	–1
1	2	–2
2	4	–4



តាមក្រាប គេសង្កេតឃើញថា

ដំបូងគេសង់ក្រាប $y = 2^x$ រួចគូស ក្រាបឆ្លុះគ្នា ធៀបនឹងអ័ក្ស (ox)

គេបានក្រាប $y = -2^x$ ។

ជាទូទៅ

- ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a^x + q$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y = a^x$ រួចធ្វើបំលែងកិលស្របអ័ក្ស (oy) ចំនួន q ឯកតាឡើងលើបើ $q > 0$ ហើយចំនួន q ឯកតាចុះក្រោមបើ $q < 0$ ។
- ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a^{(x-p)}$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y = a^x$ រួចធ្វើបំលែងកិលស្របអ័ក្ស (ox) ចំនួន p ឯកតាទៅខាងស្តាំបើ $p > 0$ ហើយ p ឯកតាទៅខាងឆ្វេងបើ $p < 0$ ។
- ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -a^x$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y = a^x$ រួចគូក្រាបឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស (ox) គេបានក្រាប $y = -a^x$ ។

ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបអនុគមន៍

ក. $y = 3^x - 3$

ខ. $y = 3^x + 1$

គ. $y = 1.5^{x-2}$

ឃ. $y = 1.5^{x+3}$

ង. $y = -5^x$

2. សមីការនិងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

2.1 សមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

សមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជាសមីការដែលមានអញ្ញាត ជានិទស្សន្ត ។

ឧទាហរណ៍ បើ $2^x = 2^4$ នោះ $x = 4$

ជាទូទៅ បើ a ជាចំនួនវិជ្ជមានខុសពី 1 នោះ $a^x = a^y$ គេបាន $x = y$

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2^{3x+5} = 128$ ឃ. $49^{x} = 7^{x^2-15}$

ខ. $5^{x-3} = \frac{1}{25}$ ង. $36^{2x} = 216^{x-1}$

គ. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 81^{x+4}$ ច. $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

ចម្លើយ

ក. $2^{3x+5} = 128$

$2^{3x+5} = 2^{7}$

$3x+5 = 7$

$x = \frac{2}{3}$

ខ. $5^{x-3} = \frac{1}{25}$

$5^{x-3} = 5^{-2}$

$x-3 = -2$

$x = 1$

គ. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 81^{x+4}$

$9^{-x} = 9^{2(x+4)}$

$-x = 2x+8$

$x = \frac{-8}{3}$

ឃ. $49^{x} = 7^{x^2-15}$

$7^{2x} = 7^{x^2-15}$

$2x = x^2-15$

$x = 5$, $x = -3$

ង. $36^{2x} = 216^{x-1}$

$6^{2(2x)} = 6^{3(x-1)}$

$4x = 3x-3$

$x = -3$

ច. $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

$10^{x-1} = 10^{2(2x-3)}$

$x-1 = 4x-6$

$x = \frac{5}{3}$ ។

ប្រតិបត្តិ ក. $5^{x}\cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$ គ. $27^{x}+12^{x} = 2\cdot 8^{x}$

ខ. $3^{4x+8}-4\cdot 3^{2x+5}+27 = 0$ ឃ. $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$

2.2 វិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

វិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមានទម្រង់ $a^{x} > a^{y}$

- បើ $a>1$ វិសមីការ $a^{x}>a^{y}$ សមមូល $x>y$ ហើយវិសមីការ $a^{x}<a^{y}$ សមមូល $x<y$
- បើ $0<a<1$ វិសមីការ $a^{x}>a^{y}$ សមមូល $x<y$ ហើយវិសមីការ $a^{x}<a^{y}$ សមមូល $x>y$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយវិសមីការ $2^{3x+1} < \frac{1}{32}$

$2^{3x+1} < \frac{1}{32}$ វិសមីការដើម

$2^{3x+1} < 2^{-5}$ ព្រោះ $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$ ឬ 2^{-5} ហេតុនេះ អង្គទាំងពីរមានគោលដូចគ្នា

$3x+1 < -5$ លក្ខណៈនៃវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$3x < -6$ ដក 1 ពីអង្គទាំងពីរ គេបាន $x < -2$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 3

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ឱ្យតម្លៃ x តូចជាង -2 ដូចជា $x = -3$

$2^{3x+1} < \frac{1}{32}$

$2^{3(-3)+1} < \frac{1}{32}$ ជំនួស x ដោយ -3 គេបាន $2^{-8} < \frac{1}{32}$ សម្រួល

$\frac{1}{256} < \frac{1}{32}$ ពិត (ប្រើលក្ខណៈ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$)

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $25^{2x} \le 5\sqrt{5}$ ខ. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x} > \frac{16}{81}$ គ. $5^x > -7$ ឃ. $(0.1)^x > 10$

ង. $27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}$ ច. $2^{9x-x^3} < 1$ ឆ. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$

ចម្លើយ ក. $25^{2x} \le 5\sqrt{5}$, $25^{2x} \le 5\left(5^{\frac{1}{2}}\right)$

$5^{4x} \le 5^{\frac{3}{2}}$, $x \le \frac{3}{8}$

ខ. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x} > \frac{16}{81}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x} > \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$-3x < 4$, $x > -\frac{4}{3}$

គ. $5^x > -7$

5^x វិជ្ជមានជានិច្ច

-7 អវិជ្ជមានជានិច្ច

ដូចនេះ វិសមីការមានឫសគ្រប់តម្លៃ $x \in \mathbb{R}$

ឃ. $(0.1)^x > 10$

$10^{-x} > 10$

$-x > 1$

$x < -1$

ង. $27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}$

$3^{3x} \cdot 3^{1-x} < 3^{-1}$

$3^{2x+1} < 3^{-1}$

$2x+1 < -1$

$2x < -2$

$x < -1$

ច. $2^{9x-x^3} < 1$

$2^{9x-x^3} < 2^0$

$9x - x^3 < 0$

$(9-x^2)x < 0$

$(9-x^2)x < 0$

$-3 < x < 0$ ឬ $x > 3$

ឆ. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$, $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^2+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-12>0$, $(x\neq 0)$

តាង $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $t>0$ យើងបាន $t^2+t-12>0$

$t<-4$, $t>3$

ដោយ $t>0$ នាំឱ្យឫសរបស់វិសមីការគឺ $t>3$

ឬ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

ដោយ $\frac{1}{3}<1$ នោះ $\frac{1}{x}<-1$

$-1<x<0$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $-1<x<0$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $(7)^{3x+1}>49$

ខ. $\left(\frac{1}{5}\right)^x<\sqrt[3]{0.04}$

គ. $3^x<\frac{1}{9\sqrt{3}}$

ឃ. $3^x\leq -3$

ង. $(0.2)^x>25$

ច. $(0.1)^{4x^2-2x-2}<(0.1)^{2x-3}$

លំហាត់

1. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមក្នុងតម្រុយតែមួយ :

ក. $f(x) = 2^x$; $g(x) = 5^x$; $h(x) = 10^x$

ខ. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

2. ចូររកតម្លៃ a បើខ្សែកោងនៃ $f(x) = a^x$ កាត់តាមចំណុចនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក. $A(3, 216)$ ខ. $B(5, 32)$

គ. $C(3, 512)$ ឃ. $D(4, 256)$

ង. $E(-(2, 64))$ ច. $F\left(-3, \frac{1}{216}\right)$

ឆ. $G(3, 343)$ ជ. $h\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

3. បង្ហាញថា បើ $f(x) = a^x$ នោះ $f(x)f(y) = f(x+y)$

4. ក. បើ (x_1, y_1) និង (x_2, y_2) ជាចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ នោះចំណុចទាំង ពីរ $(x_1 + x_2, y_1 y_2)$ និង $\left(x_1 - x_2, \frac{y_1}{y_2}\right)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង ។

ខ. បើ (x_1, y_1) ជាចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ នោះចំណុចទាំងពីរ $(2x_1, y_1^2)$ និង $\left(-x_1, \frac{1}{y_1}\right)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ ។

5. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = 2^x$

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍នីមួយៗក្នុងតម្រុយតែមួយជាមួយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = 2^x$

i). $y = f(x) - 1$

ii). $y = f(x-1)$

iii). $y = f(x+1)$

iv). $y = f(0.5x)$

v). $y = f(2x)$

vi). $y = f(-x)$

6. បើ $a>0$ ។ ចូររកតម្លៃ a និង x ដែលធ្វើឱ្យសមភាព និងវិសមភាពខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $a^x = 1$ ខ. $a^x > 1$ គ. $0 < a^x < 1$

7. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = 2^{|x|}$ ខ. $f(x) = x(2^x)$ គ. $f(x) = x^x$

8. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 2^{x-1}$ ឃ. $y = 2^{-x^2}$

ខ. $y = 2^{|x-1|}$ ង. $y = 3^{-|x+1|^2}$

គ. $y = 2^x + 2^{-x}$ ច. $y = 2^{|x^2-8|}$

9. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{27}$ ខ. $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$ គ. $4^{3x^2+2x+1} = 16$

មេរៀនទី

2 អនុគមន៍លោការីត

1. ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត

វត្ថុបំណង

- សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត
- ដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការលោការីត ។

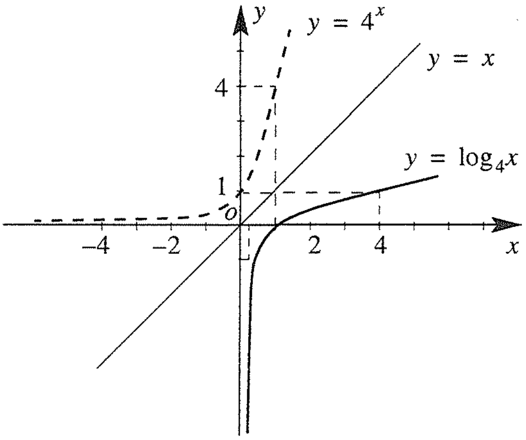
អនុគមន៍លោការីត ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។ ហេតុនេះក្រាបរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

ក. បើគោល $a > 1$

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 4^x$ និង $y = \log_4 x$ ។

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

$y = 4^x$			$y = \log_4 x$	
x	y		x	y
−2	0.06		0.25	−1
−1	0.25		0.50	−0.50
0	1		1	0
1	4		2	0.50
2	16		4	1



តាមក្រាប យើងសង្កេតឃើញថា

- តម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y = \log_4 x$ កើន
- ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_4 x$ កាត់អ័ក្ស (ox) ត្រង់ចំណុច $(1, 0)$ ជានិច្ច ។
- ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_4 x$ និង $y = 4^x$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

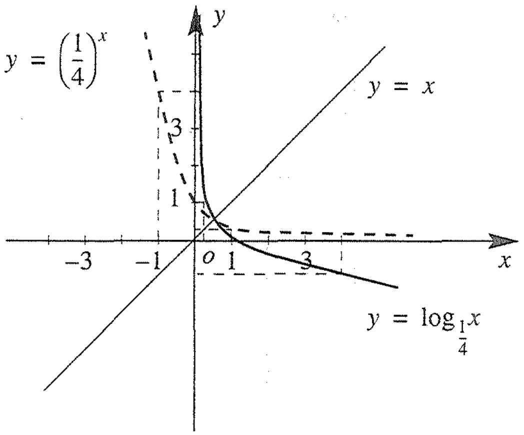
ជាទូទៅ បើ $a > 1$ នោះអនុគមន៍ $y = \log_a x$ ជាអនុគមន៍កើន ។

ខ. បើគោល $0<a<1$

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ និង $y=\log_{\frac{1}{4}}x$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$			$y=\log_{\frac{1}{4}}x$	
x	y		x	y
-2	16		0.25	1
-1	4		0.50	0.50
0	1		1	0
1	0.25		2	-0.50
2	0.06		4	-1



តាមក្រាប យើងសង្កេតឃើញថា

- តម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ ចុះ
- ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ កាត់អ័ក្ស (ox) ត្រង់ចំណុច $(1,\ 0)$ ។
- ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ និង $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ជាទូទៅ បើ $0<a<1$ នោះអនុគមន៍ $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។

ជាសន្និដ្ឋាន អនុគមន៍ $y=\log_a x$ មានក្រាប ៖

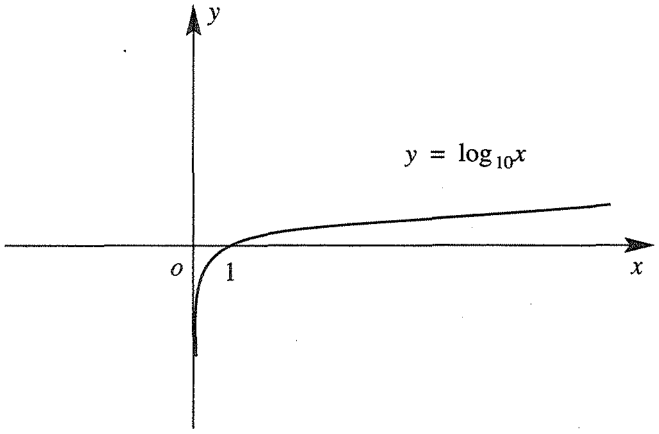
- បើ $a>1$ ក្រាបកើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ គេថា $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍កើន
- បើ $0<a<1$ ក្រាបចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ គេថា $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍ចុះ
- អនុគមន៍ $y=\log_a x$ មានក្រាបកាត់តាមចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(1,0)$ ជានិច្ច ។
- អនុគមន៍ $y=\log_a x$ មានដែនកំណត់ $x>0$ ជានិច្ច ។
- អនុគមន៍ $y=\log_a x$ និង $y=a^x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសគ្នា ហើយមានក្រាបឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

លំហាត់គំរូ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = \log_{10}x$ ខ. $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

ចម្លើយ ក. តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

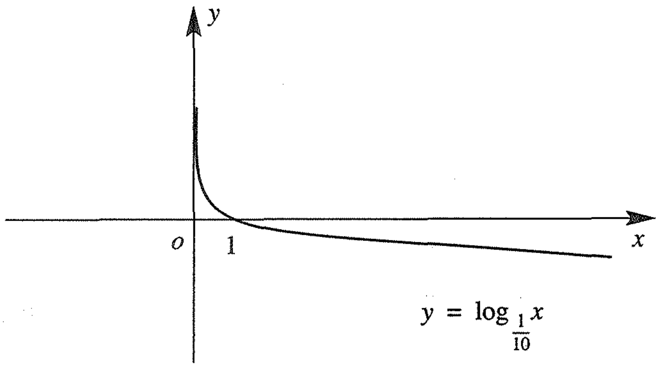
$y = \log_{10}x$	
x	y
1/100	–2
1/10	–1
1	0
10	1
100	2



យើងសង្កេតឃើញថា អនុគមន៍ $y = \log_{10}x$ មានក្រាបកើន ។

ខ. តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

$y = \log_{\frac{1}{10}} x$	
x	y
1/100	2
1/10	1
1	0
10	–1
100	–2



យើងសង្កេតឃើញថា អនុគមន៍ $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ មានក្រាបចុះ ។

ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = \log_7 x$ ខ. $y = \log_{\frac{1}{7}} x$

2. លក្ខណៈក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

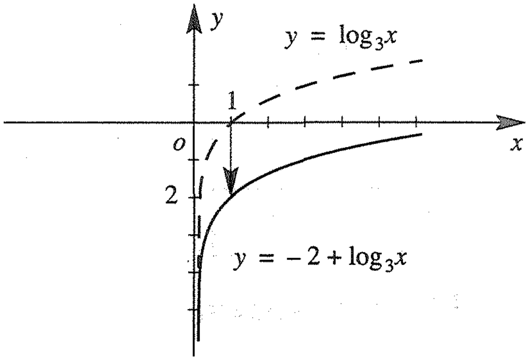
ក. $y = -2 + \log_3 x$ ខ. $y = \log_3(x-2)$ គ. $y = -\log_3 x$ ។

ចម្លើយ

ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -2 + \log_3 x$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$\log_3 x$	$y = -2 + \log_3 x$
1/3	−1	−3
1	0	−2
3	1	−1
9	2	0

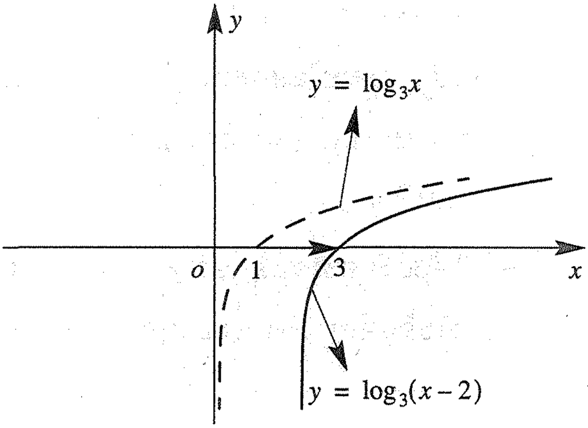


ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -2 + \log_3 x$ ដំបូងគេសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_3 x$ រួច រំកិលចំនួន 2 ឯកតាចុះក្រោមស្របអ័ក្ស (oy) គេបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -2 + \log_3 x$ ។

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_3(x-2)$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y = \log_3(x-2)$
7/3	−1
3	0
5	1
11	2

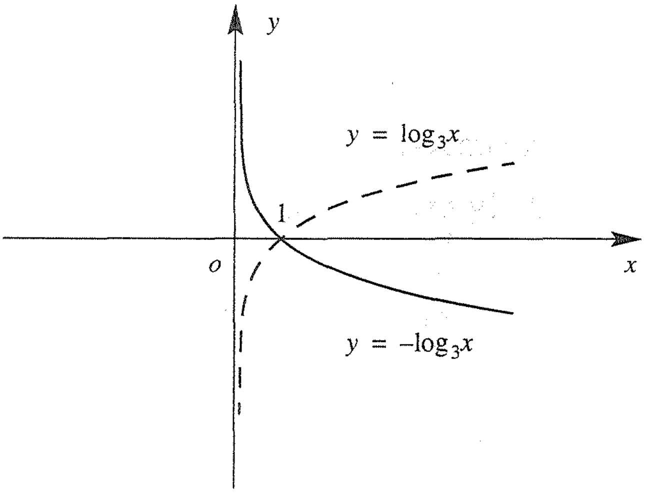


ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_3(x-2)$ ដំបូងគេសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_3 x$ រួច រំកិលចំនួន 2 ឯកតា ទៅខាងស្តាំស្របអ័ក្ស (ox) គេបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_3(x-2)$ ។

គ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -\log_3 x$

តារាងតម្លៃត្រូវគ្នានៃ x និង y

$y = -\log_3 x$	
x	y
$1/9$	2
$1/3$	1
1	0
3	-1
9	-2



ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -\log_3 x$ ដំបូងគេសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_3 x$ រួចគូសក្រាបឆ្លុះរបស់វាធៀបនឹងអ័ក្ស (ox) គេបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -\log_3 x$ ។

ជាទូទៅ :

- ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_a x + q$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y = \log_a x$ រួចធ្វើបំលែងកិលស្របអ័ក្ស (oy) ចំនួន q ឯកតាឡើងលើបើ $q > 0$ ហើយចំនួន q ឯកតា ចុះក្រោមបើ $q < 0$ ។
- ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_a(x - p)$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y = \log_a x$ រួចធ្វើបំលែងកិលស្របអ័ក្ស (ox) ចំនួន p ឯកតាទៅខាងស្តាំបើ $p > 0$ ហើយ p ឯកតាទៅខាងឆ្វេងបើ $p < 0$ ។
- ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -\log_a x$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y = \log_a x$ រួចគូសក្រាបឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស (ox) គេបានក្រាប $y = -\log_a x$ ។

ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = \log_7(x+3)$ ខ. $y = \log_7 x + 3$

គ. $y = -\log_7 x$ ឃ. $y = \log_2(x-1)^2$

ង. $y = 2 - \log_2 x^2$

3. រូបមន្តប្តូរគោល

ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម អាចឱ្យអ្នកសិក្សាអនុគមន៍លោការីត ប្រើសម្រាប់ប្តូរគោលនៃលោការីតទៅជា គោលដែលគេអាចគណនាបាន ។

បើ a , b និង x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $a \neq 1$, $b \neq 1$ គេបាន $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

សំរាយបញ្ជាក់ $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$?

តាង $M = \log_a x$

$a^M = x$ សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេបាន $\log_b a^M = \log_b x$ លើកលោការីតគោល b លើអង្គទាំងពីរ

$M\log_b a = \log_b x$ តាមលក្ខណៈនៃលោការីត

$M = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ ដោះស្រាយរក M

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ ជំនួស M ដោយ $\log_a x$

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. $\log_9 27$ ខ. $\log_{27} \dfrac{1}{3}$

គ. $\log_7 27$ ឃ. $\log_5 125$

ចម្លើយ ក. $\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}$

ខ. $\log_{27} \dfrac{1}{3} = \log_{3^3} 3^{-1} = -\dfrac{1}{3}$

គ. $\log_7 27 = \dfrac{\log_{10}27}{\log_{10}7} \approx 1.6937$

ឃ. $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

ប្រតិបត្តិ គណនា

ក. $\log_5 625$ ខ. $\log_5 346$ គ. $\log_6 4870$

4. សមីការនិងវិសមីការលោការីត

4.1 សមីការលោការីត

បើ $a>0$, $a \neq 1$ នោះសមីការ $\log_a x = \log_a y$ គេបាន $x = y$

ឧទាហរណ៍ 1 បើ $\log_4 x = \log_4 7$ នោះ $x = 7$

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\log_4 x = \dfrac{5}{2}$

$\log_4 x = \dfrac{5}{2}$, $\log_4 x = \log_4 4^{\frac{5}{2}}$ ប្រើរូបមន្ត $\log_a a = 1$

$x = 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}}$ ព្រោះ $4 = 2^2$

$x = 2^5$ ឬ $x = 32$

ឧទាហរណ៍ 3 ដោះស្រាយសមីការ $6(\log_x 8 + \log_8 x) = 13$

$6\left(\dfrac{1}{\log_8 x} + \log_8 x\right) = 13$ ប្រើរូបមន្តប្តូរគោល $\log_x 8 = \dfrac{1}{\log_8 x}$

$6 + 6(\log_8 x)^2 = 13\log_8 x$ ព្រោះ $(\log_8 x)^2 - 13\log_8 x + 6 = 0$

$(3\log_8 x - 2)(2\log_8 x - 3) = 0$

$\log_8 x = \dfrac{2}{3}$, $\log_8 x = \dfrac{3}{2}$

$x = 8^{\frac{2}{3}}$, $x = 8^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow x = 4$, $x = 16\sqrt{2}$

ឧទាហរណ៍ 4 ដោះស្រាយសមីការ $\log_9 x + \log_x 9 = \dfrac{5}{2}$

$\log_9 x + \dfrac{1}{\log_9 x} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow (\log_9 x)^2 + 1 = \dfrac{5}{2}\log_9 x$

$2(\log_9 x)^2 - 5\log_9 x + 2 = 0$

$(2\log_9 x - 1)(\log_9 x - 2) = 0$ សមមូល $\log_9 x = \frac{1}{2}$, $\log_9 x = 2$

បើ $\log_9 x = \frac{1}{2}$ ឬ $x = 9^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 3$

$\log_9 x = 2$ ឬ $x = 9^2 \Rightarrow x = 81$

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\log_9 x = \frac{3}{2}$ ខ. $\log_{\frac{1}{10}} x = -3$ គ. $\log_x 9 = 2$

4.2 វិសមីការលោការីត

- បើ $a > 1$ នោះវិសមីការ $\log_a x > \log_a y$ សមមូល $x > y$

ហើយ $\log_a x < \log_a y$ សមមូល $x < y$

ឧទាហរណ៍ បើ $\log_3 x > \log_3 7$ នោះ $x > 7$

- បើ $0 < a < 1$ នោះវិសមីការ $\log_a x > \log_a y$ សមមូល $x < y$

ហើយ $\log_a x < \log_a y$ សមមូល $x > y$

ឧទាហរណ៍ បើ $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 7$ នោះ $x < 7$

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម រួចផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $\log_3(3x-5) > \log_3(x+7)$ ខ. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \le 2$

ចម្លើយ ក. $\log_3(3x-5) > \log_3(x+7)$

$3x - 5 > x + 7$ លក្ខណៈនៃវិសមីការរបស់អនុគមន៍លោការីត

$2x > 12$ លក្ខណៈបូកបន្ថែម ឬដកលើអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការ

$x > 6$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\log(3x-5)$ មានន័យបើ $3x - 5 > 0$ ឬ $x > \frac{5}{3}$

$\log(x+7)$ មានន័យបើ $x + 7 > 0$ ឬ $x > -7$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x > 6$ ឬ $x \in]6, +\infty[$ ។

ខ. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \le 2$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ សរសេរ $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ តាមលក្ខណៈលោការីតនៃគោល

$2x-1 \ge \frac{1}{4}$ ប្តូរទិសដៅព្រោះគោលស្មើនឹង $\frac{1}{2} < 1$

$x \ge \frac{5}{8}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ មានន័យបើ $2x-1>0$

ឬ $x > \frac{1}{2}$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \ge \frac{5}{8}$

ឬ $x \in \left[\frac{5}{8}, +\infty\right[$

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $\log_5(x^2-6) > \log_5 x$ ខ. $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$ គ. $\log_x 27 \ge 3$

លំហាត់

1. សរសេរអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = 10^x$ ខ. $g(x) = 3^x$

គ. $h(x) = 7^x$ ឃ. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ង. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ច. $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

2. សរសេរអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = \log x$ ខ. $g(x) = \log_3 x$

គ. $h(x) = \log_5 x$ ឃ. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

ង. $g(x) = \log_{\frac{5}{4}} x$ ច. $h(x) = \log_{21} x$

3. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x) = 5^x$

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍ $f(x) = 5^x$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ

គ. សរសេរសមីការអនុគមន៍ច្រាសរបស់អនុគមន៍ខាងលើ ។

4. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = \log_6 x$ ខ. $g(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$ គ. $h(x) = \log_{0.8} x$

5. បង្ហាញថា បើ $f(x) = \log_a x$ នោះ $f(xy) = f(x) + f(y)$

6. ក. បង្ហាញថា បើ (x_1, y_1) និង (x_2, y_2) ជាចំណុចពីរនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ នោះចំណុច $\left(\frac{x_1}{x_2}, y_1 - y_2\right)$ ក៏ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ។

ខ. បង្ហាញថា បើ (x_1, y_1) ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ នោះចំណុច $(x_1^2, 2y_1)$ និងចំណុច $\left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$ ក៏ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ។

7. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = a^x$ និងអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x) = \log_a x$ ដែល $a > 0$ ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ កាត់គ្នា ។

8. គេឱ្យ $f(x) = x - \log_2 x$ ហើយ $g(x) = 2^x$ ។

   គណនា

   ក. $f(g(x))$ ខ. $g(f(x))$

9. ដោះស្រាយសមីការនិងផ្ទៀងផ្ទាត់

   ក. $\log_2(2x+4) - \log_2(x-1) = 3$ គ. $\log_5 x + \log_{10} x = 5$

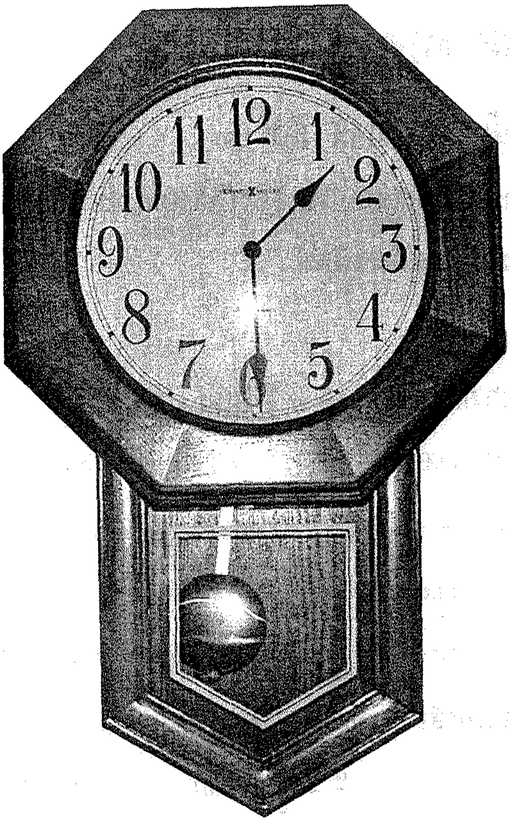
   ខ. $\log_2 x + \log_4 x = 5$ ឃ. $\log(x+10) + \frac{1}{2}\log x^2 = 2 - \log 4$

10. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $\forall x$

11. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2+2) \geq 1$ មានសំណុំឫសចំពោះ $\forall x$ ។

ជំពូក 3
សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

❶ សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ



នៅក្នុងគណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋាន យើងបានសិក្សាពីសមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រងាយៗ ដូចជា $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = t$, $\cos x > a$, $\sin x < a ...$ ។

ផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាពីសមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រទម្រង់ផ្សេងៗទៀត ដែលមានលក្ខណៈស៊ីជម្រៅជាងមុន ។

មេរៀនទី

1 សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

យើងបានសិក្សារួចមកហើយពីសមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រងាយៗ នៅក្នុងសៀវភៅភាគ 1 ។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងសិក្សាពីសមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ ដែលមានទម្រង់ផ្សេងៗទៀត ។

វត្ថុបំណង
- ដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្រ
- ដោះស្រាយវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

1. សមីការត្រីកោណមាត្រ

1.1 សមីការដឺក្រេទី 1 ធៀបនឹង sinx និង cosx

ជាសមីការត្រីកោណមាត្រដែលក្រោយពីបង្រួមហើយមានរាង : $a\cos x + b\sin x = c$ ។

ដំណោះស្រាយសមីការនេះមានពីររបៀប :

របៀបទី 1

- បំលែងសមីការនេះជារាង $\cos(x-\theta) = \frac{c}{r}$ ដែល $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $(r \geq 0)$ និង $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ។ ដោយ $\cos\theta = \frac{a}{r}$ នាំឱ្យ $a = r\cos\theta$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$ នាំឱ្យ $b = r\sin\theta$ ។

  សមីការ $a\cos x + b\sin x = r\cos\theta\cos x + r\sin\theta\sin x = c$

  $r(\cos x\cos\theta + \sin x\sin\theta) = c$, $r\cos(x-\theta) = c$ ឬ $\cos(x-\theta) = \frac{c}{r}$ ។

- ដោះស្រាយសមីការ $\cos(x-\theta) = \frac{c}{r}$ តាមរូបមន្ត $\cos x = \cos\alpha$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \quad (1)$

គេបាន $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ នាំឱ្យ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ។

សមីការ $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\cos\frac{\pi}{3}\sin x + 2\sin\frac{\pi}{3}\cos x = 0$

$$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{ ឬ } \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

សមីការ (1) មានចម្លើយ : $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$, $x+\frac{\pi}{3} = k\pi$ ។

ដូចនេះ $x = \frac{-\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។ ចំនួនចុងធ្នូចម្លើយមានពីរ

របៀបទី 2 គណនា $\sin x$ និង $\cos x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\tan\frac{x}{2}$ ដោយ $x\neq\pi+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ ។ គេជំនួស $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ និង $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ នោះសមីការ $a\cos x+b\sin x = c$ ទៅជាសមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមាន t ជាអញ្ញាត : $(c+a)t^2-2bt+c-a = 0$ ។

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2 រកឫសរួចដោះស្រាយសមីការតាមរូបមន្ត $\tan\frac{x}{2} = \tan\alpha$ ។

សំគាល់ វិធីនេះអាចបាត់ឫសត្រង់ $x = \pi+2k\pi$ ដូចនេះ ដំបូងគេត្រូវពិនិត្យមើលថាតើ $x = \pi+2k\pi$ ជាឫសរបស់សមីការ $a\cos x+b\sin x = c$ ឬទេ ?

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\sin x+7\cos x = 5$ ។

តាង $t = \tan\frac{x}{2}(x\neq\pi+2k\pi)$ សមីការសរសេរ $\frac{2t}{1+t^2}+7\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 5$

$2t+7-7t^2 = 5+5t^2$ ឬ $6t^2-t-1 = 0$ ។

សមីការមានឫស $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{1}{3}$ ។

- បើ $t_1 = \frac{1}{2}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ នោះមាន $\alpha_1\in\mathbb{R}$ ដែល $\tan\alpha_1 = \frac{1}{2}$

  គេបាន $\tan\frac{x}{2} = \tan\alpha_1$ នាំឱ្យ $\frac{x}{2} = \alpha_1+k\pi$ ឬ $x = 2\alpha_1+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

- បើ $t_2 = -\frac{1}{3}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$ នោះមាន $\alpha_2\in\mathbb{R}$ ដែល $\tan\alpha_2 = -\frac{1}{3}$

  គេបាន $\tan\frac{x}{2} = \tan\alpha_2$ នាំឱ្យ $\frac{x}{2} = \alpha_2+k\pi$ ឬ $x = 2\alpha_2+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

  ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ : $x = 2\alpha_1+2k\pi$, $x = 2\alpha_2+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x = \sqrt{2}$ (1)

ចម្លើយ គេបាន $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}$ ហើយ $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

សមីការសរសេរ $2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = \sqrt{2}$ ឬ $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$

សមីការ (1) មានចម្លើយ :
$$2x-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\quad x = \frac{7\pi}{24}+k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$
$$2x-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\quad x = -\frac{\pi}{24}+k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

ចំនួនចុងធ្នូចម្លើយមាន 4

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2\sin x - 3\cos x = 3$

ខ. $\cos 2x - \sin 2x = -1$

គ. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

ឃ. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 3$

1.2 សមីការដឺក្រេទី 2 ធៀបនឹងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនពិត x

សមីការទាំងនោះមានរាង : $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$, $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$

$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ និង $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការបែបនេះ គេត្រូវ :

- បំលែងសមីការឱ្យទៅជាសមីការដឺក្រេទី 2 ដូចខាងលើសិន ។
- តាងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនពិត x ដោយ X ឬ Y ឬ t... ។
- ដាក់លក្ខខណ្ឌទៅតាមអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលឱ្យ ។
- ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមានអញ្ញាត X ឬ Y ឬ t... ។
- យកឬសដែលបានមកជំនួសជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រវិញ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ ហើយដោះស្រាយតាមរូបមន្តសមីការត្រីកោណមាត្រ ។

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $4 - \cos 2x - 7\sin x = 0$ ។

ដោយ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ សមីការអាចសរសេរ $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ (1)

តាង $t = \sin x$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ $-1 \le t \le 1$ ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ $2t^2 - 7t + 3 = 0$, $\Delta = 25$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 3$ មិន ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ

ដូចនេះ $t_1 = \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ យើងបាន $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\tan^2\frac{x}{2} - (1-\sqrt{3})\tan\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$ ។

គេតាង $\tan\frac{x}{2} = t$ សមីការ (1) សរសេរ $t^2 - (1-\sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0$ ដោះស្រាយសមីការនេះ

គេបាន $t_1 = -1$, $t_2 = \sqrt{3}$ ។ $t_1 = \tan\frac{x}{2} = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $t_2 = \tan\frac{x}{2} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ ។

ដូចនេះ $\tan\frac{x}{2} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$

$\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{3}$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ : $x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$ និង $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$ ។

ចម្លើយ លក្ខខណ្ឌ $1 + \sin 2x \neq 0$, $\sin 2x \neq -1$, $2x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

សមីការសរសេរ $\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin 2x$

$2\sin x\cos x + 3\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin 2x$, $2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$

តាង $t = \cos x$ សមីការទៅជា $2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0$ ។

ដោះស្រាយសមីការនេះ គេបាន $t_2 = \sqrt{2}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ។

$t_1 = \cos x = \sqrt{2}$ (មិនយក) ។ $t_2 = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$ ។

ដូចនេះ $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ នាំឱ្យ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

តាមលក្ខខណ្ឌខាងលើសមីការមានឫស $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2\cos^2 - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$

ខ. $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$

គ. $5\tan^2 y + 5\tan y = 2(1 + \tan^2 y)$

ឃ. $8\sin^2 x - 6\sin x = 5$ ។

2. សមីការដែលមានរាង $a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d$ ដែល $a, b, c \neq 0$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះ គេត្រូវចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\cos^2x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ។ គេបានសមីការ $a\tan^2x + b\tan x + c = 0$ រួចដោះស្រាយតាមសមីការដឺក្រេទី 2 ដូចខាងលើ ។

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $3\sin^2x + 3\sin x\cos x - 6\cos^2x = 0$ ។

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\cos^2x$ សមីការសរសេរ $3\tan^2x + 3\tan x - 6 = 0$ ។

តាង $t = \tan x$ គេបាន $3t^2 + 3t - 6 = 0$ សមីការនេះមានឫសពីរគឺ : $t_1 = 1$, $t_2 = -2$ ។

$t_1 = \tan x = 1$ គេបាន $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។ $t_2 = -2$ តាង $\tan\alpha = -2$, $\tan x = \tan\alpha$, $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។ សមីការមានចម្លើយ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ និង $x = \alpha + k\pi$, $k \in Z$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2}}{1 - \sin x} - \tan^2x\sin x = \dfrac{1 + \sin x}{2} + \tan^2x$ ។

លក្ខខណ្ឌ $\sin x \neq 1$, $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

សមីការអាចសរសេរ $$\frac{\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)^2 - 2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{2} + \tan^2x(1 + \sin x)$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2x}{1 - \sin x} = (1 + \sin x)\left(\frac{1}{2} + \tan^2x\right)$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2x = (1 - \sin^2x)\left(\frac{\cos^2x + 2\sin^2x}{2\cos^2x}\right)$$

$$\frac{2 - \sin^2x}{2} = (1 - \sin^2x)\frac{(\cos^2x + \sin^2x + \sin^2x)}{2(1 - \sin^2x)}$$

$$2 - \sin^2x = 1 + \sin^2x$$

$\sin^2x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

លំហាត់គំរូ 1 ដោះស្រាយសមីការ $3\sin^2x + 2\sin x\cos x = 2$ ។

ចម្លើយ សមីការសរសេរ $3\sin^2x + 2\sin x\cos x = 2(\sin^2x + \cos^2x)$

$\sin^2x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2x = 0$ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\cos^2x \neq 0$ ។

គេបាន $\tan^2x + 2\tan x - 2 = 0$, $\tan x = 1 \pm \sqrt{3}$ ។ តាង $\tan\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$

$\tan x = \tan\alpha$, $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 រកតម្លៃ m ដែលនាំឱ្យសមីការ $1+m\cos x = m^2-\cos^2 x$ មានឫស ។

ចម្លើយ តាង $\cos x = t$ ដែល $-1\le t\le 1$ ។

គេបាន $t^2+mt+1-m^2 = 0$ ។ តាង $f(t)=t^2+mt+1-m^2$

សមីការមានឫសមួយលើចន្លោះ $[-1,\ 1]$ កាលណា $f(-1)\times f(1)\le 0$ ។

គេបាន $(2-m-m^2)(2+m-m^2)\le 0$

$$(m^2+m-2)(m^2-m-2)\le 0\ ,\ -2\le m\le -1 \text{ ឬ } 1\le m\le 2 \quad (1)$$

សមីការមានឫសពីរលើ $[-1,\ 1]$ កាលណា

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ f(-1)>0\\ f(1)>0\\ -1<\frac{s}{2}<1\end{cases}\quad \begin{cases}m^2-4(1-m^2)\ge 0\\ -m^2-m+2>0\\ -m+m+2>0\\ -1<-\frac{m}{2}<1\end{cases}\quad \begin{cases}m\le -\frac{2}{\sqrt5}\ ,\ \frac{2}{\sqrt5}\le m\\ -2<m<1\\ -1<m<2\\ -2<m<2\end{cases}$$

$$-1<m\le -\frac{2\sqrt5}{5}\ ,\ \frac{2\sqrt5}{5}\le m\le 2 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) នាំឱ្យសមីការមានឫសកាលណា $-2\le m\le -\frac{2\sqrt5}{5}$ ឬ $\frac{2\sqrt5}{5}\le m\le 2$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $7\cos^2 x+6\sqrt3\sin x\cos x-\sin^2 x+2 = 0$

ខ. $2\cos^2 x+\cot^2 x = \dfrac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}$

គ. $\tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x = 3$

ឃ. $\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sin 2x = 0$

ប្រតិបត្តិ 2 រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $\sin 4x = m\tan x$ មានឫស $x\ne k\pi$ ។

3. ប្រព័ន្ធសមីការត្រីកោណមាត្រ

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$

ប្រើរូបមន្តបំលែងពីផលបូកទៅជាផលគុណ គេបានសមីការ

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$ ដោយ $x+y = \frac{\pi}{3}$ គេបាន $2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$ ។

គេមាន $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1 = \cos 0$ គេបាន $\frac{x-y}{2} = 2k\pi$ ឬ $x-y = 4k\pi$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3} \\ x-y = 4k\pi \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $\left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi\right)$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} & (1) \\ \tan x + \tan y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} & (2) \end{cases}$

លក្ខខណ្ឌ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ ។ ដោយ $\tan y = \cot x$ តាមមុំបំពេញ

គេបាន $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} & (1) \\ \tan x + \tan y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} & (2) \end{cases}$, $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ \tan^2 x - \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\tan x + 1 = 0 \end{cases}$

សមីការ $\tan^2 x - \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\tan x + 1 = 0$ មានឫសពីរគឺ $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

ដូចនេះគេបាន $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ \tan x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6} \end{cases}$, $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} - k\pi \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{3} - k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ ។

លំហាត់គំរូ រកតម្លៃ m ដែលនាំឱ្យប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានឫស

$$\begin{cases} x - y = m & (1) \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) - 1 - 4\cos^2 m = 0 & (2) \end{cases}$$

ចម្លើយ គេបានសមីការ (2) សរសេរ : $4\cos(x+y)\cos(y-x)-1-4\cos^2 m = 0$ តាម (1) ជំនួសចូល

គេបាន : $4\cos^2 m-4\cos(x+y)\cos m+1 = 0$, $[2\cos m-\cos(x+y)]^2+\sin^2(x+y) = 0$

$$\begin{cases}\sin(x+y) = 0\\ \cos(x+y) = 2\cos m\end{cases} , \begin{cases}x+y = 2k\pi\\ \cos m = \frac{1}{2}\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}x-y = \pi+2k\pi\\ \cos m = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

- ចំពោះ $\cos m = \frac{1}{2}$, $m = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ នោះ $\cos(x+y) = 1$ គេបាន

$$\begin{cases}x+y = 2k\pi\\ x-y = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases} , \begin{cases}x = \frac{\pi}{6}+k\pi\\ y = -\frac{\pi}{6}+k\pi\end{cases} , k\in\mathbb{Z}$$

- ចំពោះ $\cos m = -\frac{1}{2}$, $m = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ នោះ $\cos(x+y) = -1$

គេបានប្រព័ន្ធ : $\begin{cases}x+y = \pi+2k\pi\\ x-y = m\end{cases}$, $\begin{cases}x+y = (2k+1)\pi\\ x-y = m\end{cases}$, $\begin{cases}m = \frac{m}{2}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\\ y = -\frac{m}{2}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ដូចនេះ • $m = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ប្រព័ន្ធមានឫស $\begin{cases}x = \frac{m}{2}+k\pi\\ y = -\frac{m}{2}+k\pi\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$

• $m = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ប្រព័ន្ធមានឫស $\begin{cases}x = \frac{m}{2}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\\ y = -\frac{m}{2}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y = \frac{1}{4}\\ x+y = \frac{5\pi}{6}\end{cases}$

ខ. $\begin{cases}\sin x\cos y = \frac{1}{4}\\ 3\tan x = \tan y\end{cases}$

ប្រតិបត្តិ 2 គេឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\sin x\cos 2y = m^2+1\\ \cos x\sin 2y = m\end{cases}$

ក. បញ្ជាក់តម្លៃ m ដែលនាំឱ្យប្រព័ន្ធសមីការមានឫស ។

ខ. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាមតម្លៃ m ដែលរកបាននោះ ។

4. វិសមីការត្រីកោណមាត្រ

4.1 វិសមីការដែលមានរាង $a\cos x + b\sin x > c$

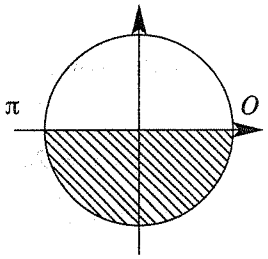
ឧទាហរណ៍.1 ដោះស្រាយវិសីមការ $\sin x - \cos x > 0$ ។

គេបាន $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) > 0$, $\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) > 0$, $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > 0$ ។

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > 0$ ត្រូវនឹងចុងធ្នូនៅលើកន្លះរង្វង់ដែលមិនឆូត

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយ $2k\pi < x-\frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi$

ឬ $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ។



សំគាល់ បើវិសមីការដែលមានទម្រង់ជាកន្សោមប្រភាគ ឬវិសីមការដឺក្រេទី 2 គេត្រូវដោះស្រាយរកសំណុំឫសដោយសិក្សាសញ្ញា ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយវិសមីការ $\sin x + \frac{1}{\sin x} \ge \frac{5}{2}$ ។

គេមាន $\sin x + \frac{1}{\sin x} \ge \frac{5}{2}$, $\sin x + \frac{1}{\sin x} - \frac{5}{2} \ge 0$

$$\frac{2\sin^2 x - 5\sin x + 2}{2\sin x} \ge 0$$

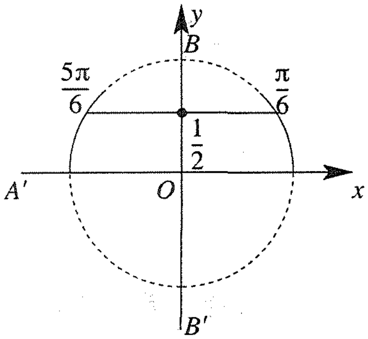
$$\frac{(\sin x - 2)(2\sin x - 1)}{2\sin x} \ge 0$$ ដោយ $\sin x - 2 < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

គេបាន $\frac{2\sin x - 1}{2\sin x} \le 0 \quad (1)$

វិសមីការមានចម្លើយលុះត្រាតែ $\sin x \ne 0$ ឬ $x \ne k\pi$ ។

តាង $\sin x = X$ ដែល $-1 \le X \le 1$ វិសមីការ (1) ទៅជា $\frac{2X-1}{2X} \le 0$ សិក្សាសញ្ញាគេបាន

X	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$2X-1$		$-$		$-$	0	$+$	
X		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2X-1}{X}$		$+$		$-$	0	$+$	



គេបាន $0 < X \le \frac{1}{2}$, $0 < \sin x \le \frac{1}{2}$ ត្រូវនឹង $2k\pi < x \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ឬ $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le x < \pi + 2k\pi$, $k \in Z$ ចុងធ្នូចម្លើយនៅលើធ្នូចរណីមាត្រ (ខ្សែរពេញ)

លំហាត់គំរូ 1 ដោះស្រាយវិសមីការ $2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$

ចម្លើយ គេមាន $2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) - 2(\sin x + \cos x) > 0$

$(\cos x + \sin x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2] > 0$

តាង $f(x) = (\cos x + \sin x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2]$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប 2π នោះគេអាចសិក្សាវិសមីការក្នុងចន្លោះ $(0,\ 2\pi)$ ។

គេបាន $f(x) = 0$, $\cos x + \sin x = 0$ (1) ឬ $2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2 = 0$ (2)

(1) : $\tan x = -1$, $\left(x = \frac{3\pi}{4}\ ,\ x = \frac{7\pi}{4}\right)$ ។

(2) តាង $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ដែល $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

$$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x\ ,\quad \sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

(2) អាចសរសេរ $2t + \frac{1 - t^2}{2} - 2 = 0$ ឬ $t^2 - 4t + 3 = 0$

ដោះស្រាយសមីការនេះ គេបាន $t = 1$; $t = 3$ (មិនយក)

$t = 1$, $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ ។ គេបាន $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$

គេបានសញ្ញាដូចខាងក្រោម

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ឬ

$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

លំហាត់គំរូ 2 បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ចម្លើយ គេមាន $\frac{3}{2}-(\cos A+\cos B+\cos A) = \frac{1}{2}[3-2(\cos A+\cos B+\cos C)]$

$$=\frac{1}{2}\left[1-4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2-2\cos C\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2(1-\cos C)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+4\sin^2\frac{C}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+4\sin^2\frac{C}{2}\right]$$

ព្រោះ $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+1-\cos^2\frac{A-B}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2}\right]\ge 0$$

ដូចនេះ $\frac{3}{2}\ge\cos A+\cos B+\cos C$ ឬ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ប្រតិបត្តិ 1 ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $\sin x+\cos x>\cos\frac{\pi}{6}$

ខ. $\frac{2\cos x-5\sin x}{\cos x}>0$

គ. $\frac{\cos x}{1-3\cos x}<\frac{1-\cos x}{1-9\cos^2 x}$

ឃ. $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$

ប្រតិបត្តិ 2 បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$ ។

មេរៀនសង្ខេប

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $a\cos x + b\sin x = c$ គេមានពីរបៀប :

1. បំលែងសមីការនេះជារាង $\cos(x-\theta) = \frac{c}{r}$ ដែល $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $(r \geq 0)$ និង $\cos\theta = \frac{a}{r}$,

$\sin\theta = \frac{b}{r}$ រួចដោះស្រាយសមីការ $\cos(x-\theta) = \frac{c}{r}$ តាមរូបមន្ត $\cos x = \cos\alpha$ ។

2. គណនា $\sin x$ និង $\cos x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\tan\frac{x}{2} (x \neq \pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z})$ ។

គេជំនួស $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ និង $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ នោះសមីការ $a\cos x + b\sin x = c$ ទៅជា សមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមាន t ជាអញ្ញាត : $(c+a)t^2 - 2bt + c - a = 0$ ។ រកឫសសមីការដឺក្រេទី2 រួចដោះស្រាយសមីការតាមរូបមន្ត $\tan\frac{x}{2} = \tan\alpha$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ : $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$, $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$

$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ និង $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$ គេត្រូវ :

- បំលែងសមីការឱ្យទៅជាសមីការដឺក្រេទី 2 ដូចខាងលើសិន ។
- តាងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនពិត x ដោយ X ឬ Y ឬ t... ។
- ដាក់លក្ខខណ្ឌទៅតាមអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលឱ្យ ។
- ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមានអញ្ញាត X ឬ Y ឬ t... ។
- យកឫសដែលបានមកជំនួសជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រវិញ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ ហើយដោះស្រាយតាមរូបមន្តសមីការត្រីកោណមាត្រ ។

ដើម្បីដោះស្រាយវិសមីការដែលមានទម្រង់ $a\cos x + b\sin x < c$ ឬ $a\cos x + b\sin x > c, \ldots$ គេត្រូវ :

- បំលែងអង្គទី 1 នៃវិសមីការឱ្យមានរាង $\cos(x-\theta)$ ឬ $\sin(x-\theta)$ ។
- ដោះស្រាយវិសមីការ $\cos(x-\theta) > \cos\alpha$ ឬ $\sin(x-\theta) < \sin\alpha, \ldots$

តាមរបៀបដោះស្រាយវិសមីការ $\cos x > a$ ឬ $\sin x < a$

បើវិសមីការដែលមានទម្រង់ជាកន្សោមប្រភាគ ឬវិសមីការដឺក្រេទី 2 គេត្រូវដោះស្រាយរកសំណុំឫសដោយសិក្សាសញ្ញា ។

លំហាត់

1. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$

ខ. $\sin 3x + 2\cos x - 2 = 0$

គ. $\sin 2x + \tan x = 2$

ឃ. $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos 13x$

ង. $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$

ច. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$

2. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $1 + \cot 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

ខ. $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{7}{16}$

គ. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

ឃ. $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$

ង. $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x\sin 2x$

ច. $\cos^4 x + \sin^6 x = \cos 2x$

3. គេឱ្យសមីការ $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0 \quad (1)$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ (1) កាលណា $m = \dfrac{3}{2}$ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដែលធ្វើឱ្យសមីការមានឫស x នៅចន្លោះ $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ ។

4. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} \sin(x + y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \cos x + \sin y = \sqrt{2} \end{cases}$

គ. $\begin{cases} \sin(x + y) = \cos(x - y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$ ។

5. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\frac{x}{2}$

ខ. $6\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x) > 2$

គ. $\frac{\cos x}{1+2\cos x} > \frac{1-\cos x}{1-2\cos x}$

ឃ. $\frac{1-\sin x}{1-3\sin x} < \frac{1+\sin x}{1-9\sin^2 x}$ ។

6. បង្ហាញថា

ក. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}$

ខ. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$

គ. $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq \frac{1}{8}$ ។

7. បង្ហាញថាក្នុង ΔABC គេបាន : $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ ។

8. បង្ហាញថា ΔABC ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ ៖ $\tan A\tan B\tan^2\frac{C}{2} = 1$ ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

លំហាត់ជំពូក

1. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

ខ. $\sin^6 x + \cos^3 x = 2(\sin^6 x + \cos^8 x)$

គ. $\frac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$

ឃ. $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

ង. $\cos^3 x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin 2x - 2\cos x = 0$

ច. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$ ។

2. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $2\cos^2 x - \cos x + 1 \le 0$ ក្នុង $[0,\ \pi]$

ខ. $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x} > 0$ ក្នុង $[0,\ \pi]$

គ. $\dfrac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1} > 0$ ។

3. ក. ពន្លាតកន្សោម $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 8)(x - 1)$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$ ។

4. គេឱ្យសមីការ $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0 \qquad (1)$

ក. ដោះស្រាយសមីការ (1) កាលណា $m = 1$

ខ. រកតម្លៃ m ដែលធ្វើឱ្យសមីការមានឫសនៅចន្លោះ $[0,\ \pi]$ ។

5. គេមានវិសមីការ (E) : $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$

គេតាង $X = \sin x$ វិសមីការសរសេរ $2X^2 - 5X + 2 > 0$ ។

ក. ដាក់ជាផលគុណកត្តាកន្សោម $2x^2 - 5x + 2$

ខ. បង្ហាញថាវិសមីការ (E) សរសេរជារាង $2(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$

គ. សិក្សាសញ្ញា $(\sin x - 2)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$ នៅលើចន្លោះ $[0,\ 2\pi]$ ។

ឃ. រកសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ (E) ។

6. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{5}{4} \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} \cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 \\ \sin^3 x - \sin y + \cos x = 0 \end{cases}$ គ. $\begin{cases} \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan y \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ ។

7. គេមាន ΔABC ដែលមានមុំ និងជ្រុងបំពេញលក្ខខណ្ឌ ៖ $\dfrac{1 + \cos A}{1 + \cos B} = \dfrac{2a + c}{2a - c}$ ។

បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

8. មុំ $A,\ B,\ C$ នៃ ΔABC មួយមាន $\dfrac{A + C}{2} = B$ ។

រករង្វាស់មុំនៃត្រីកោណនោះបើគេដឹងថា $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ ។

PROEUS DARA

ជំពូក 4 បំលែងលីនេអ៊ែរ

❶ បំលែងលីនេអ៊ែរ

TAKAKAZU SEKI

អ្នកដែលនាំឱ្យមានបញ្ញត្តិម៉ាទ្រីសមុនគេ គឺ Arthur Cayley (1875-1921) ។ តាមពិតដេទែរមីណង់បានកើតឡើងមុនម៉ាទ្រីស ហើយមានប្រភពនៅក្នុងចម្លើយទូទៅនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។ ដើមកំណើតនៃដេទែរមីណង់ត្រូវបានសរសេរដោយ Leibniz នៅឆ្នាំ 1678 ស្របពេលដែលនៅក្នុងប្រទេសជប៉ុន TAKAKAZU SEKI បានសម្រេចស្នាដៃដ៏ធំធេងលើបញ្ហានេះក្នុងឆ្នាំ 1680 ។

នៅចុងសតវត្សទី 19 Cayley, Jame Syluester and Ferdinand Frobenius បានសិក្សាទ្រឹស្តីម៉ាទ្រីស និងដេទែរមីណង់យ៉ាងស៊ីជំរៅ ។ ដោយមានការរីកចំរើនក្នុងពីជគណិតលីនេអ៊ែរ ម៉ាទ្រីសត្រូវបានគេយកទៅដោះស្រាយក្នុងបំលែងលីនេអ៊ែរ ឬអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ហើយក៏ក្លាយជាបញ្ញត្តិសំខាន់ក្នុងទ្រឹស្តីពីជគណិតលីនេអ៊ែរ ។

មេរៀនទី 1

បំលែងលីនេអ៊ែរ

1. បំលែងលីនេអ៊ែរ

1.1 សញ្ញាណ

យើងធ្លាប់រៀនរួចមកហើយនូវបំលែងចំណុចមួយចំនួននៅក្នុងប្លង់ ។

ឧទាហរណ៍ បើគេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅជា $M'(x', y')$ តាមបំលែង H ដែលមានផ្ចិត O និងផលធៀប 4 នោះគេបានសមីការ

$x' = 4x$

$y' = 4y$

សមីការនៃបំលែងទាំងដែលសរសេរបែបនេះហៅថាសមីការដឺក្រេទី 1 ឬហៅថាសមីការលីនេអ៊ែរ ។

វត្ថុបំណង

- បកស្រាយបំលែងលីនេអ៊ែរជាម៉ាទ្រីស
- កំណត់រូបភាពតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ
- កំណត់រូបភាពតាមបំលែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់
- កំណត់រូបភាពតាមបំលែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់ក្នុងត្រីកោណមាត្រ

ក្នុងករណីនេះ គេថាបំលែងទាំងជាបំលែងលីនេអ៊ែរ ។

ជាទូទៅ បំលែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ កំណត់ដោយសមីការ $x' = ax + cy$

$y' = bx + dy$

ដើម្បីងាយស្រួលសិក្សាទៅមុខ គេអាចបកស្រាយបំលែងលីនេអ៊ែរឱ្យមានទម្រង់ជាម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ ។

ក្នុងករណីនេះគេថា $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ ។

ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរ A ។

គេអាចគណនា x', y' បានដោយគេគុណម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ រួចផ្ទឹមតួម៉ាទ្រីសនៃអង្គទី 1 និងតួម៉ាទ្រីសនៃអង្គទី 2 ។

សំគាល់ ដើម្បីសម្រួលក្នុងសំណេរ គេអាចប្រើអក្សរ A ដដែលនេះសម្រាប់សំគាល់ថាជាម៉ាទ្រីសផង និងជាបំលែងលីនេអ៊ែរផង ។

ឧទាហរណ៍ 1 រូបភាពនៃចំណុច $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ តាមបំលែង $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ គឺ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \times 2 + 1 \times \frac{1}{2} \\ 4 \times 2 + 3 \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{19}{2} \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ គឺ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2}\right)$ ។

ចំពោះបំលែងលីនេអ៊ែរដែលមានម៉ាទ្រីស $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

រូបភាពវាគឺ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+0 \\ 0+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ។}$$

គេសង្កេតឃើញថា រូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ត្រួតលើភាពដើម $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

គេថា I ជាបំលែងលីនេអ៊ែរដដែល ។ មានន័យថាចំណុចដែលប្លែងដោយ I នៅតែជាចំណុចនោះដដែល ។

ឧទាហរណ៍ 2 រូបភាពនៃចំណុច $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ តាម $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ គឺ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $x' = -\frac{1}{2},\ y' = 3$ ។

លំហាត់គំរូ 1 បង្ហាញថា បើម៉ាទ្រីស A ប្លែងចំណុច $M \neq 0$ នៅតែជាចំណុច M ដដែល នោះម៉ាទ្រីស $A = I$ ។

ចម្លើយ តាង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសដែលប្លែង $M(x,\ y)$ ទៅ $M(x,\ y)$ ដដែល

យើងបាន $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ឬ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{bmatrix}$

យើងបាន $x = ax + cy$

$y = bx + dy$

$x(1-a) - cy = 0 \quad (1)$

$y(1-d) - bx = 0 \quad (2)$

ដោយ $M \neq 0$ នោះ $x \neq 0$, $y \neq 0$ ហើយសមីការ (1) និង (2) ផ្ទៀងផ្ទាត់

លុះត្រា $\begin{cases} 1-a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ និង $\begin{cases} 1-d = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{matrix} 0 = 1; b = 0 \\ c = 0; d = 1 \end{matrix}$

យើងបាន $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 កំណត់ម៉ាទ្រីស A ដែលប្លែងពីចំណុច $(1,\ 2)$ ទៅចំណុច $(8,\ 1)$ និងប្លែងពីចំណុច $(-1,\ 1)$ ទៅ $(1,\ 2)$ ។

ចម្លើយ តាង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសប្លែងពីចំណុច $(1,\ 2)$ ទៅចំណុច $(8,\ 1)$ នោះយើងបាន

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

យើងបានសមីការ $\begin{matrix} a + 2c = 8 & (1) \\ b + 2d = 1 & (2) \end{matrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

យើងបានសមីការ $\begin{matrix} -a + c = 1 & (3) \\ -b + d = 2 & (4) \end{matrix}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (1) និង (3) យើងបាន $a = 2$, $c = 3$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (2) និង (4) យើងបាន $b = -1$, $d = 1$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសដែលត្រូវរកគឺ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ តាមម៉ាទ្រីស A ដែល $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ ។ កំណត់ម៉ាទ្រីស A ។

2. កំណត់ α ដើម្បីឱ្យចំណុច M' ត្រួតលើ M ។

1.2 ចំណុចឥតប្រែប្រួល

ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $P(3, 2)$ និង $Q(5, 2)$ ដែលប្លែងដោយបំលែងលីនេអ៊ែរ $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ។

តាមបម្រាប់រូបភាពនៃ P កំណត់ដោយ :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 3 - 5\times 2 \\ 2\times 3 - 4\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ ដូចនេះ $P'(-1, -2)$ ។

រូបភាពនៃ Q កំណត់ដោយ :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 5 - 5\times 2 \\ 2\times 5 - 4\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$ ដូចនេះ $Q'(5, 2)$ ។

តាមបំលែង A រូបភាពនៃ $P(3, 2)$ គឺ $P'(-1, -2)$ ហើយ $Q(5, 2)$ គឺ $Q'(5, 2)$ នោះគេសង្កេតឃើញថា ចំណុច Q មិនផ្លាស់ប្តូរទីតាំងទៅតាម A នោះទេ ព្រោះរូបភាពរបស់វា Q' នៅតែជាចំណុច Q ដដែល ។

ក្នុងករណីនេះ គេថា Q ជាចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមបំលែង A ។

ជាទូទៅ Q ជាចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមបំលែង A កាលណា $A(Q) = Q$ ។

- ចំពោះបំលែងថាំង $H(0, k)$ កំណត់ដោយ $x' = kx$, $y' = ky$ ។
- គល់ O គឺជាចំណុចឥតប្រែប្រួល ។ ព្រោះ $O(0, 0)$ ផ្តល់រូបភាព $O(0, 0)$ ដដែល ។
- ចំពោះបំលែងដែលមានម៉ាទ្រីសឯកតា I គឺ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។

- គ្រប់ចំណុចនៃប្លង់ដែលប្លែងតាម I នៅតែជាចំណុចខ្លួនឯងដដែល ។

ព្រោះ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

កំណត់ចំណុចឥតប្រែប្រួល ។

ចម្លើយ បើ $M(x, y)$ ជាចំណុចឥតប្រែប្រួល លុះត្រាតែ $x' = x$, $y' = y$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3 \\ 3x + 4y - 3 \end{bmatrix}$$

យើងបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 2x - y + 3 = x \\ 3x + 4y - 3 = y \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ យើងបាន $x = -1$, $y = 2$ ។

ដូចនេះ ចំណុចឥតប្រែប្រួលគឺ $(-1, 2)$ ។

លំហាត់គំរូ 2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ ប្លែងតាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ បានរូបភាពខ្លួនឯងដដែល ។

ចម្លើយ យក $M(x, y)$ ប្លែងទៅ $M'(x', y')$ តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ នោះយើងបាន

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ។}$$

បើ M ជាចំណុចមួយនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ នោះ M មានកូអរដោនេ $(a, 2a - 1)$ ។

ដូចនេះ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 2a - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - 2a + 1 \\ 4a - 2a + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 1 \\ 2a + 1 \end{bmatrix}$

នោះយើងបាន $x' = a + 1$, $y' = 2a + 1$ ។

ដោយបំបាត់ a យើងបាន $y' = 2x' - 1$ ដែលជារូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ ។

បន្ទាត់ដើម និងរូបភាពវាមានសមីការដូចគ្នាគឺ $y = 2x - 1$

ប្រតិបត្តិ 1. គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ កំណត់ដោយ

ក. $x' = 2y - 3$, $y' = x + 1$

ខ. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ។

កំណត់ចំណុចឥតប្រែប្រួល ។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = 2x - 3$ ប្លែងតាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ បានរូបភាពខ្លួនឯងដដែល ។

3. រកចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមបំលែង $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ។

4. រកចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមបំលែង $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ។

1.3 បំលែងលីនេអ៊ែរច្រាស

ឧទាហរណ៍ 1 គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ តាមបំលែងចាំងដែលមានម៉ាទ្រីស $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ដែល $k \neq 0$ ។

គេបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ នាំឱ្យគេបាន $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

គេថា M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែង H ។

ឥឡូវនេះ គេយក M ជារូបភាពនៃ M' វិញ ហើយក្នុងករណីនេះគេត្រូវគណនា x, y ជាអនុគមន៍នៃ x' និង y' ។

គេបាន $x = \frac{1}{k}x'$ និង $y = \frac{1}{k}y'$ បកស្រាយសមីការនេះជាម៉ាទ្រីស គឺ

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ នោះគេថា M ជារូបភាពនៃ M' តាមបំលែងចាំង H ។

គេកំណត់បំលែងចាំងនៃ H ដោយ H^{-1} ដែលមានម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$ ។

ដូចនេះ $H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ គេប្លែង $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ តាមបំលែង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ នោះ

$M' = A(M)$ ឬ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $\begin{matrix} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{matrix}$

ដើម្បីកំណត់បំលែងច្រាស A^{-1} ដែលប្លែង $M'(x', y')$ ទៅ $M(x, y)$ វិញនោះ គេត្រូវគណនា (x, y) ជាអនុគមន៍នៃ (x', y') ។

$\begin{cases} ax + cy = x' \\ bx + dy = y' \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} adx + cdy = dx' \\ -bcx - cdy = -cy' \end{cases}$ សមមូល

$(ad - bc)x = dx' - cy'$ ក្នុងករណី $ad - bc \neq 0$ នាំឱ្យគេបាន

$x = \frac{1}{ad - bc}(dx' - cy')$, $y = \frac{1}{ad - bc}(-bx' + ay')$

បកស្រាយជាម៉ាទ្រីស គេបាន

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ឬ $M = A^{-1}(M')$

គេថា A^{-1} ជាបំលែងច្រាសដែលមានម៉ាទ្រីសច្រាស $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ដែល $ad - bc \neq 0$

ហេតុនេះ ម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ គឺ $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ដែល $ad - bc \neq 0$

លំហាត់គំរូ 1 L ជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x + 3y - 3 = 0$ ។

រកបំលាស់ទីនៃ L តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ តាង L' ជាបម្លាស់ទីនៃ L : $x + 3y - 3 = 0$ តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ដើម្បីកំណត់ L' គេត្រូវរកចំណុច A', B' ដែលជារូបភាពរៀងគ្នារបស់ចំណុច A, B នៃបន្ទាត់ L ហើយបំលាស់ទីនៃ L គឺជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច A', B' ។

គេយក $A(0, 1)$ និង $B(3, 0)$ ជាចំណុចនៃ L នោះគេបាន

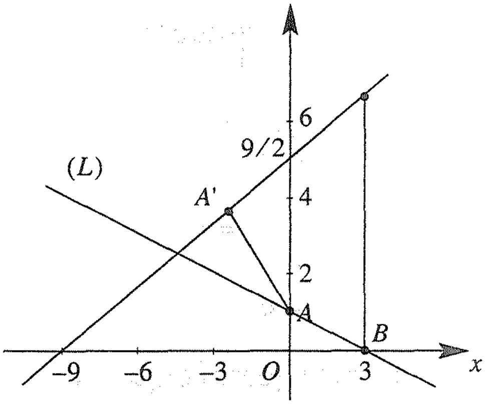
រូបភាពនៃ A' កំណត់ដោយ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

នាំឱ្យ $A'(-1, 4)$ ។

រូបភាពនៃ B' គឺ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

នាំឱ្យ $B'(3, 6)$ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ L' កាត់តាមពីរចំណុច A' និង B' កំណត់ដោយសមីការ : $L' : x - 2y + 9 = 0$ ។



ជាទូទៅ ដើម្បីកំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ L គេត្រូវគណនា x, y ជាអនុគមន៍នៃ x', y' រួចយកទៅជំនួសក្នុងសមីការ $L : x + 3y - 3 = 0$ ។

បើ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ នោះ $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4x' + y' \\ -2x' + y' \end{bmatrix}$$

យើងបាន $x = \frac{4x' + y'}{6}$, $y = \frac{-2x' + y'}{6}$

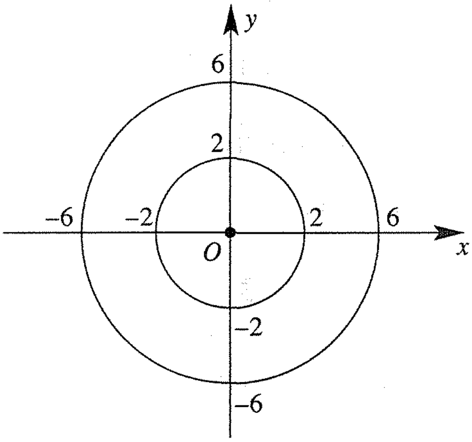
ជំនួសក្នុងសមីការបន្ទាត់ $L : \frac{4x' + y'}{6} + 3\left(\frac{-2x' + y'}{6}\right) - 3 = 0$ ឬ $x' - 2y' + 9 = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $L : x + 3y - 3 =$ ផ្លាស់ទីបន្ទាត់ $L : x - 2y + 9 = 0$ ។

លំហាត់គំរូ 2 កំណត់រូបភាពនៃរង្វង់ $C : x^2 + y^2 = 4$ តាម $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ នោះ $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x' \\ \frac{1}{3}y' \end{bmatrix}$$



ជំនួស x, y ក្នុងសមីការរង្វង់

$$\left[\frac{1}{3}x'\right]^2 + \left[\frac{1}{3}y'\right]^2 = 4$$

$$\left[\frac{1}{9}x'^2\right] + \left[\frac{1}{9}y'^2\right] = 4$$

$$x'^2 + y'^2 = 36$$

ហេតុនេះ រូបភាពនៃរង្វង់ $x^2 + y^2 = 4$ គឺជារង្វង់ដែលមានសមីការ $x'^2 + y'^2 = 36$ ។

លំហាត់គំរូ 3 កំណត់រូបភាពនៃសមីការវ៉ិចទ័រ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ដែលប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ប្លែងទៅ $\vec{r} = \vec{a}' + \lambda\vec{b}'$ ។

ក្នុងករណីនេះគូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ និង $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\vec{a}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ និង $\vec{b}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

ដូចនេះរូបភាពនៃសមីការវ៉ិចទ័រគឺ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. កំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ដែលប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ក. $y = 2x + 1$ ខ. អ័ក្សអាប់ស៊ីស គ. $2x + y + 1 = 0$

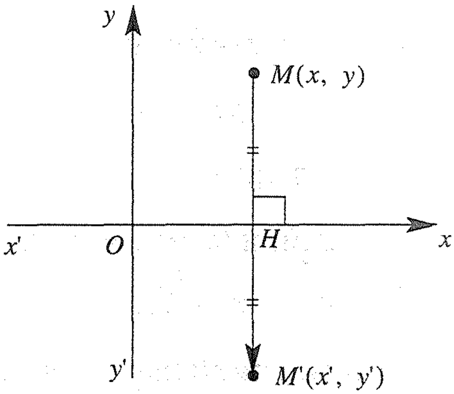
2. កំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 3$ ដែលប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ។

3. កំណត់រូបភាពនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ដែលប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ។

2. បំលែងឆ្លុះ

2.1 បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស x'x

បើ $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x, y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ នោះគេបាន $HM' = HM$ ហើយកូអរដោនេនៃចំណុច $x' = x$, $y' = -y$ ។



M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ $M \xrightarrow{S_{x'x}} M'$

ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគណនា (x', y') ជាអនុគមន៍នៃ (x, y)

តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គេបាន : $\begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{cases}$

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំលែងឆ្លុះនេះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

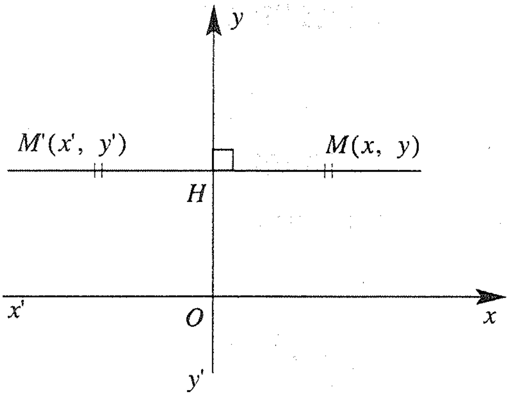
$$S_{x'x} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ ។

ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ ។

ជាទូទៅ បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ : $S_{x'x} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

2.2 បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស y'y

បើ $M'(x',\ y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,\ y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ នោះគេបាន $HM' = HM$ ហើយកូអរដោនេនៃចំណុច $x' = -x$, $y' = y$ ។



M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $M \xrightarrow{S_{y'y}} M'$

ដូចនេះគេបានបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ ៖

$$\begin{cases} x' = (-1)\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + y \end{cases}$$

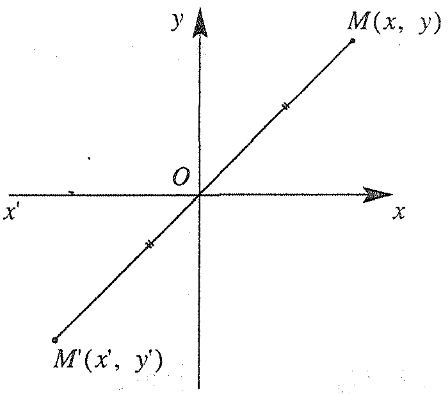
ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំលែងឆ្លុះនេះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

$$S_{y'y} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ ។

ជាទូទៅ បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ : $S_{y'y} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

2.3 បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O



បើ $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x, y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។ នោះគេបាន $OM' = OM$ ហើយកូអរដោនេនៃចំណុច $x' = -x$, $y' = -y$ ។

M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ $M \xrightarrow{S_o} M'$

ដូចនេះ គេបានបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ ៖

$$\begin{cases} x' = (-1)\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{cases}$$

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំលែងឆ្លុះនេះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

$S_0 = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។ ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។

ជាទូទៅ បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ : $S_o : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ

1. បំលែងបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ ។
2. បំលែងប៉ារ៉ាបូល $y = (x+1)^2$ តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{x'x}$ ។

ចម្លើយ

1. ដោយ $ax + by + c = 0$ នាំឱ្យ $by = -(ax + c)$ នោះ $y = -\left(\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right)$

តាងកូអរដោនេ $\left(k,\ -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b}\right)$ នៅលើបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ នោះគេបាន

បំលែងបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ គឺ ៖

$$S_{y'y} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b} \end{bmatrix}$$

នាំឱ្យ $x' = -k$, $y' = -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b}$ នោះ $y' = \frac{a}{b}x' - \frac{c}{b}$ គេបាន $-ax + by - c = 0$ ។

2. ដោយ $y = (x+1)^2$ នោះ $y = x^2+2x+1$

តាងកូអរដោនេ $(m,\ m^2+2m+1)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y = (x+1)^2$ នោះ គេបានបំលែងប៉ារ៉ាបូល $y = (x+1)^2$ តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{x'x}$ គឺ ៖

$$S_{x'x} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ m^2+2m+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ -m^2-2m-1 \end{bmatrix}$$ នាំឱ្យ

$x' = m$, $y' = -m^2-2m-1$ នោះ $y' = -x'2-2x'-1 = -(x'+1)^2$ នាំឱ្យ $y = -(x+1)^2$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. ចូរបំលែងបន្ទាត់ $2x+3y-6 = 0$ តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ និង $S_{x'x}$ ។
2. ចូរបំលែងប៉ារ៉ាបូល $y = (x-1)^2$ តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{x'x}$ និង $S_{y'y}$ ។
3. កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $A(2,\ 3)$ និង $B(-2,\ -5)$ តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{x'x}$, $S_{y'y}$ និង S_o

3. បំលែងចាំង

បើ $M'(x',\ y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,\ y)$ តាមបំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k ដែល $k \neq 0$ នោះគេបានកូអរដោនេ $x' = kx$, $y' = ky$ អាចសរសេរជា $\begin{cases} x' = kx+0\cdot y \\ y' = 0\cdot x+ky \end{cases}$

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំលែងចាំង H នោះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចនេះ ៖

$$H(O,\ k) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ ។

បើ $k = 1$ នោះ $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ បើ $k = -1$ នោះ $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ជាទូទៅ បំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k គឺ : $H(O,\ k) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $A(2,\ 4)$, $B\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ តាមបំលែងចាំង $H(O,\ 2)$ និង $H(O,\ -1)$ ។

PROEUS DARA

ចម្លើយ តាមបំលែងចាំង $H(O,\ k)$ គឺ : $H(O,\ k)\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- ចំណុច $A(2,\ 4)$ គឺ $H(O,\ 2)\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

  $H(O,\ -1)\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

- ចំណុច $B\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ គឺ : $H(0,\ 2)\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

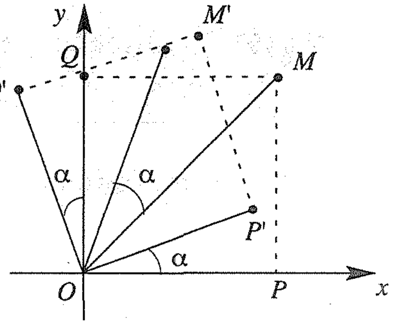
  $H(O,\ -1)\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ប្រតិបត្តិ

1. បំលែងបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ តាមបំលែងចាំង $H(O,\ 1)$ និង $H(O,\ -1)$ ។
2. បំលែងប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ តាមបំលែងចាំង $H(O,\ 1)$ និង $H(O,\ -1)$ ។

4. បំលែងវិល

បើ $M'(x',\ y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,\ y)$ តាមបំលែងវិល $\mathfrak{R}(O,\ \alpha)$ នោះគេបាន $OM' = OM$, $(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OM'}) = \alpha$ ។



គេនឹងបកស្រាយបំលែងវិលជាសមីការ ។

ដើម្បីគណនា $x',\ y'$ ជាអនុគមន៍នៃ $x,\ y$ គេត្រូវដៅ P និង Q ជាចំណោលកែងរៀងគ្នានៃ M មកលើអ័ក្ស $\overrightarrow{ox}$ និង $\overrightarrow{oy}$ ។

បើ M ផ្លាស់ទីមក M' តាមមុំ α នោះ P និង Q ក៏ផ្លាស់ទីរៀងគ្នាមក P' និង Q' តាមមុំ α ដែរ ។ ឥឡូវគេគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច P' និង Q'

តាមរូបបើគេយកកូអរដោនេ : $P'(x\cos\alpha,\ x\sin\alpha)$, $Q'(-y\sin\alpha,\ y\cos\alpha)$

ចំពោះចតុកោណ $OP'M'Q'$ គេមាន $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'}$

$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ និង $\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'} = (x\cos\alpha\vec{i} + x\sin\alpha\vec{j}) + (-y\sin\alpha\vec{i} + y\cos\alpha\vec{j})$

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x\cos\alpha\vec{i} + x\sin\alpha\vec{j}) + (-y\sin\alpha\vec{i} + y\cos\alpha\vec{j})$$

$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\vec{i} + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\vec{j}$$

គេទាញបាន : $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

ក្នុងករណី $\alpha = 60°$ សមីការទៅជា

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \quad , \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

បំលែងវិលបកស្រាយដោយសមីការដឺក្រេទី 1 ជាបំលែងលីនេអ៊ែរ ។

គេអាចបកស្រាយបំលែងវិលពីសមីការទៅជាម៉ាទ្រីស

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \quad , \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

គេអាចសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ បំលែងវិលនៃមុំ α កំណត់ដោយ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

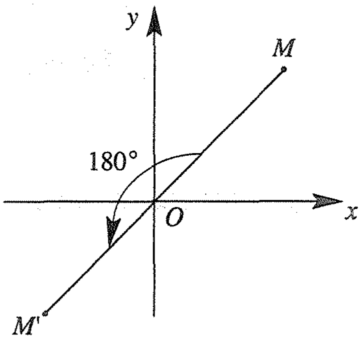
ឧទាហរណ៍ រូបភាពនៃចំណុច $(-1, 3)$ តាមបំលែងវិល $\Re(O, 60°)$ កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3} - 1}{2} \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$ ។

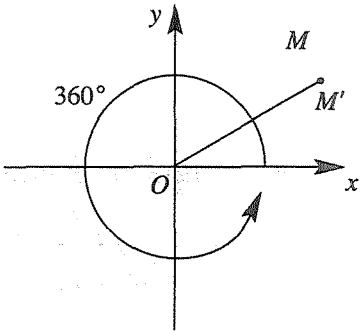
- ករណី $\alpha = 180°$ នោះ $\Re = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_O$

  កាលណាមុំនៃបំលែងរិលស្មើនឹង 180° នោះ បំលែងរិលជាបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។



- ករណី $\alpha = 360°$ នោះ $\Re = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

  កាលណាមុំនៃបំលែងរិលស្មើនឹង 360° នោះបំលែងរិលជាបំលែងដដែលក្នុងករណីនេះរូបភាព M' ត្រួតលើធាតុ M ។



- បំលែងរិលមានម៉ាទ្រីសច្រាស

  $\Re^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ព្រោះដេទែមីណង់វា $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ។

លំហាត់គំរូ 1 កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $(2, \sqrt{3})$ តាមបំលែងរិល $\Re(O, 30°)$ ។

ចម្លើយ ម៉ាទ្រីសនៃបំលែងរិលតាមមុំ 30°

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

រូបភាពនៃចំណុច $(2, \sqrt{3})$ តាម $\Re$ កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} ។$$

លំហាត់គំរូ 2 កំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ $D : y = 2x - 1$ តាមបំលែង $\Re(O, 45°)$ ។

ចម្លើយ ម៉ាទ្រីសនៃបំលែងរិលតាមមុំ 45°

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

រូបភាពនៃ D តាម $\mathfrak{R}$ តាងដោយ D' ដើម្បីកំណត់ D' គេត្រូវជ្រើសរើសយក A និង B នៃបន្ទាត់ D រួចកំណត់រក A' និង B' ។ បន្ទាត់ដែលកាត់តាម A' និង B' គឺជារូបភាពនៃ D ។

ចំណុច $A(1,\ 1)$ និង $B(2,\ 3)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ $y = 2x - 1$

នោះរូបភាពនៃ A' និង B' កំណត់ដោយ : $A' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

សមីការបន្ទាត់ D' កំណត់ដោយសមីការ

$\dfrac{x-0}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0} = \dfrac{y - \sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}$ យើងបានរូបភាពនៃ D គឺ $D' : y = -3x + \sqrt{2}$ ។

ជាទូទៅ គេគណនា $x,\ y$ ជាអនុគមន៍នៃ $x',\ y'$ រួចជំនួស $x,\ y$ ក្នុងសមីការ $y = 2x - 1$ ។ គេនឹងបានសមីការ D' ដែលជារូបភាពនៃ D ។

បើ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathfrak{R}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នោះ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathfrak{R}^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ដែល $R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{bmatrix}$$

ជំនួស $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$ និង $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$ ទៅក្នុងសមីការ $y = 2x - 1$ យើងបាន

$\frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') - 1$ យើងបាន $y' = -3x' + \sqrt{2}$ ។

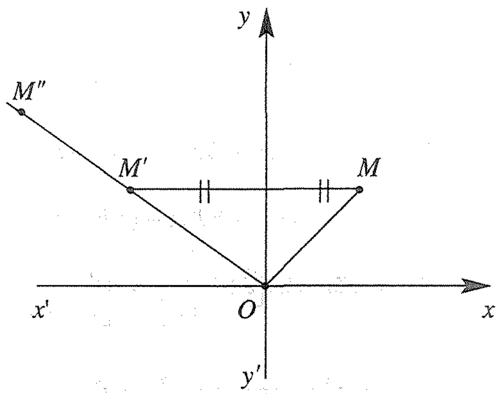
ហេតុនេះ រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ តាមបំលែងវិល គឺបន្ទាត់ : $y = -3x + \sqrt{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. កំណត់ចំណុចដែលមានរូបភាព $(-2,\ 2)$ តាមបំលែងវិលនៃមុំ $120°$ ។

2. កំណត់រូបភាពនៃ $y = x$ ដែលវិលជុំវិញគល់ O តាមមុំ $130°$ ។

5. បំលែងលីនេអ៊ែរបណ្ដាក់

5.1 បណ្ដាក់នៃបំលែងលីនេអ៊ែរពីរ



ឧទាហរណ៍ គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ រួចគេបន្តប្លែងចំណុច $M'(x', y')$ ទៅ $M''(x'', y'')$ តាមបំលែងចាំង $H(O, 2)$ ។ តើចំណុច M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងអ្វី ? M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងបន្តបន្ទាប់ $M \xrightarrow{S} M' \xrightarrow{H} M''$ ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគណនា (x'', y'') ជាអនុគមន៍នៃ (x, y) តាមសមីការបណ្ដាក់ដូចខាងក្រោម ៖

តាមបំលែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $x' = -x$, $y' = y$ ។

តាមបំលែងចាំង $H(O, 2)$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $x'' = 2x'$, $y'' = 2y'$ ។

ជាសរុប យើងបាន $x'' = (-2x)$, $y'' = 2y$

បកស្រាយសមីការជាម៉ាទ្រីស យើងបាន $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

ដូចនេះ M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងដែលមានម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ។

បំលែងដែលប្លែងចំណុច M ទៅ M'' កកើតដោយបំលែងពីរ ហៅថា **បំលែងបណ្ដាក់** ។

ជាទូទៅ បើ $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ ជាបំលែងលីនេអ៊ែរ ដែលប្លែងចំណុចរៀងគ្នាពី M ទៅ M' និងពី M' ទៅ M'' យើងបាន

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \text{ ដែល } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ និង } \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ ។}$$

បំលែងលីនេអ៊ែរបណ្ដាក់ដែលប្លែងពី $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ទៅ $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ម៉ាទ្រីសបំលែងបណ្ដាក់ដែលប្លែងពី M ទៅ M' ស្មើនិងផលគុណនៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ។

ដើម្បីកំណត់វិធានគណនាផលគុណម៉ាទ្រីស គេត្រូវគណនា x'', y'' ជាអនុគមន៍នៃ x, y តាមសមីការបណ្តាក់ដូចខាងក្រោម :

$$x' = ax + cy \qquad x'' = a'x' + c'y'$$

$$y' = bx + dy \qquad y'' = b'x' + d'y'$$

នោះ $x'' = (aa' + bc')x + (a'c + c'd)y$

$y'' = (ab' + bd')x + (c'b + d'd)y$

បកស្រាយជាម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

យើងបានវិធានផលគុណនៃម៉ាទ្រីសគឺ : $\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{bmatrix}$

ជាទូទៅ បើគេប្លែងចំណុច M ទៅ M'' តាមម៉ាទ្រីសបន្តបន្ទាប់ A និង B នោះ $M'' = BA(M)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $(2, -1)$ តាមម៉ាទ្រីស BA ដែល

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ចម្លើយ តាង $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $(2, -1)$ នោះ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = BA\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -\frac{1}{2}(-1) + 2 \cdot 0 \\ 4(2) + (-5) & 4(-1) + (-5) \cdot 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 10 \end{bmatrix}$$

ហេតុនេះ $M'\left(\frac{3}{2}, 10\right)$ ជារូបភាពនៃចំណុច $(2, -1)$ តាម BA ។

លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យបំលែងពីរ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $M'(2, 3)$ តាម AB និង BA ។

ចម្លើយ រូបភាពនៃ $(2, 3)$ តាម AB គឺ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = BA\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 29 \end{bmatrix}$$

រូបភាពនៃ $(2, 3)$ តាម BA គឺ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = BA\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 38 \end{bmatrix}$$

យើងឃើញថារូបភាពនៃ $(2, 3)$ តាម AB មិនស្មើគ្នានឹងរូបភាពតាម BA នោះទេ ។

ប្រតិបត្តិ កំណត់រូបភាពនៃចំណុច (x, y) តាមបំលែង AA ដែល $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

5.2 បណ្ដាក់រវាង $\mathfrak{R}$ និង H

បើ $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x, y)$ តាមបំលែងរិល $\mathfrak{R}(O, \alpha)$ ហើយ $M''(x'', y'')$ ជារូបភាពនៃ $M'(x', y')$ តាមបំលែងរិល $\mathfrak{R}(O, \alpha)$ នោះ M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងបណ្ដាក់ដែលគេកំណត់ដូចខាងក្រោម :

M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងបន្តបន្ទាប់ $M \xrightarrow{H} M' \xrightarrow{\mathfrak{R}} M''$

ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគណនា (x'', y'') ជាអនុគមន៍នៃ (x, y) តាមសមីការបណ្ដាក់ដូចខាងក្រោម :

តាមបំលែងថាំង $H(O, k)$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $x' = kx$, $y' = ky$

តាមបំលែងរិល $\mathfrak{R}(O, \alpha)$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

នាំឱ្យ $x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

ជាសរុប យើងបាន $x'' = k(x\cos\alpha - y\sin\alpha)$, $y'' = k(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$

បកស្រាយសមីការជាម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ជាទូទៅ បើគេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ តាមបំលែងថាំង $H(O, k)$ រួចគេបន្តប្លែងចំណុច $M'(x', y')$ ទៅ $M''(x'', y'')$ តាមបំលែងរិល $\Re(O, \alpha)$ នោះគេបាន M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងបណ្តាក់ដែលគេកំណត់ដូចខាងក្រោម :

- $$\left.\begin{array}{l} H(O, K): \quad M \to M' \\ \Re(O, \alpha): \quad M' \to M'' \end{array}\right\} \Rightarrow M'' = \Re H(M)$$

បានន័យថា $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ដូចគ្នាដែរបណ្តាក់រវាង H និង R ។

លំហាត់គំរូ 1. គេមានចំណុច $M(2, 1)$ ដែលចំណុច M នេះប្លែងតាមបំលែងរិល $\Re(O, 30°)$ និងបន្តប្លែងតាមបំលែងថាំង $H(O, 2)$ ។ ចូរកំណត់រូបភាព M តាម $\Re H$ ។

ចម្លើយ 1. រូបភាពនៃ M តាម $\Re H$ គឺ

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} - 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ប្រតិបត្តិ 1. គេឱ្យចំណុច $P(2, 5)$, $Q(-3, 4)$ ដែលចំណុច P និង Q នេះប្លែងតាមបំលែងរិល $\Re(O, 60°)$ រួចបន្តប្លែងតាមបំលែងថាំង $H(O, 2)$ ។ រករូបភាពរបស់ P និង Q តាម RH ។

2. គេមានត្រីកោណ ABC មួយ ដែលកំពូល $A(4, 3)$, $B(2, 1)$ និង $C(6, 3)$ ដែលកំពូល A, B និង C ប្លែងតាមបំលែងរិល $\Re(O, 60°)$ រួចបន្តប្លែងតាមបំលែងថាំង $H(O, 3)$ ។ ចូររករូបភាពនៃកំពូល A, B និង C តាមបំលែង $H\Re$ ។

5.3 អនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណមាត្រ

នៅមេរៀនត្រីកោណមាត្រ យើងបានបកស្រាយនូវរូបមន្តវិធីបូកកូស៊ីនុសនិងស៊ីនុស

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

ឥឡូវនេះ យើងនឹងបកស្រាយរូបមន្តនេះឡើងវិញដោយប្រើបំលែងបណ្ដាក់នៃបំលែងវិលពីរ ។

គេប្លែង M ទៅ M' តាមបំលែងវិលនៃមុំ a គឺ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

គេបន្តប្លែង M' ទៅ M'' តាមបំលែងវិលនៃមុំ b គឺ $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

យើងបាន M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងបណ្ដាក់នៃបំលែងវិលទាំងពីរ

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & -\sin a\cos b - \sin b\cos a \\ \sin b\cos a + \sin a\cos b & \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត M'' ក៏ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិលនៃមុំ $a+b$ ដែរ គឺ ៖

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ផ្ទឹមជួរទី 1 នៃម៉ាទ្រីសទាំងពីរ យើងបាន ៖

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

លំហាត់គំរូ 1 គេប្លែងចំណុច $(2,\ 1)$ តាមបំលែងវិល $\Re(O,\ 30°)$ រួចបន្តប្លែងតាម $\Re(O,\ 45°)$ ។ កំណត់រូបភាពចុងក្រោយរបស់វា ។

ចម្លើយ តាង a និង b ជាមុំដែលងាយរករបស់កូស៊ីនុស និងស៊ីនុស នោះគេបាន

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & -\sin a\cos b - \sin b\cos a \\ \sin b\cos a + \sin a\cos b & \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45° & -\sin 30°\cos 45° - \sin 45°\cos 30° \\ \sin 45°\cos 30° + \sin 30°\cos 45° & \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

លំហាត់គំរូ 2 គេប្លែងចំណុច (3, 2) តាមបំលែងវិល $\mathfrak{R}(O, 12°)$ រួចបន្តប្លែងតាម $\mathfrak{R}(O, 18°)$ ។ កំណត់រូបភាពចុងក្រោយរបស់វា ។

ចម្លើយ តាង a និង b ជាមុំដែលលំបាករករបស់កូស៊ីនុស និងស៊ីនុស នោះគេបាន

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

ប្រតិបត្តិ កំណត់រូបភាពចុងក្រោយនៃចំណុច (3, 0) ដោយដឹងថា គេប្លែងវាតាមបំលែងវិល $\mathfrak{R}(O, 60°)$ រួចបន្តប្លែងតាម $\mathfrak{R}(O, -45°)$ ។

មេរៀនសង្ខេប

• បំលែងលីនេអ៊ែរ

បំលែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងចំណុច $M(x,\ y)$ ទៅ $M(x',\ y')$ កំណត់ដោយសមីការ

$x' = ax + cy$, $y' = bx + dy$

• ចំណុចឥតប្រែប្រួល

បើ Q ជាចំណុចឥតប្រែប្រួលទៅតាមបំលែង A កាលណា $A(Q) = Q$ ។

- ចំពោះបំលែងចាំង $H(O,\ k)$ កំណត់ដោយ $x' = kx$, $y' = ky$ ។

គល់ O គឺជាចំណុចឥតប្រែប្រួល ព្រោះ $O(0,\ 0)$ ផ្តល់រូបភាព $O(0,\ 0)$ ដដែល ។

- ចំពោះបំលែងដែលមានម៉ាទ្រីសឯកតា I គឺ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។

- គ្រប់ចំណុចនៃប្លង់ដែលប្លែងតាម I នៅតែជាចំណុចខ្លួនឯងដដែល ។

ព្រោះ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

• បំលែងលីនេអ៊ែរច្រាស

គេប្លែង $M(x,\ y)$ ទៅ $M'(x',\ y')$ តាមបំលែង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ នោះ

$M' = A(M)$, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{matrix}$ ។

ម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ គឺ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ។

- **បំលែងលីនេអ៊ែរ**

បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ ៖ $S_{x'x}\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

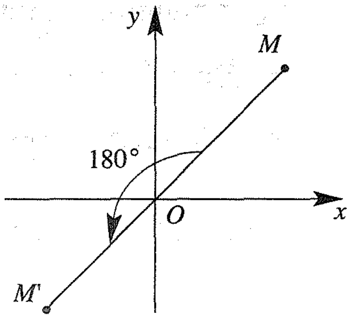
បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ ៖ $S_{y'y}\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ ៖ $S_O\ :\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

បំលែងថាំង H ដែលមានផលធៀប k គឺ ៖ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

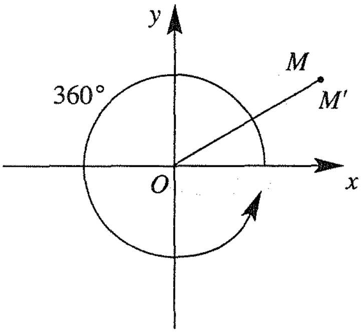
បំលែងវិលនៃមុំ α កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ ។



- ករណី $\alpha = 180°$ នោះ $\Re = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_o$

កាលណាមុំនៃបំលែងវិលស្មើនឹង $180°$ នោះ បំលែងវិលជាបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។



- ករណី $\alpha = 360°$ នោះ $\Re = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

កាលណាមុំនៃបំលែងវិលស្មើនឹង $360°$ នោះ បំលែងវិលជាបំលែងដដែល ក្នុងករណីនេះ រូបភាព M' ត្រួតលើធាតុ M ។

- បំលែងវិលមានម៉ាទ្រីសច្រាស

$$\Re^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ព្រោះដេទែមីណង់វា $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ។

- **បំលែងលីនេអ៊ែរបណ្ដាក់**

បើគេប្លែងចំណុច M ទៅ M'' តាមម៉ាទ្រីសបន្តបន្ទាប់ A និង B នោះ $M'' = BA(M)$ ។

- **បណ្ដាក់រវាង R និង H**

$$\left.\begin{array}{l} -\ \Re(O,\ \alpha)\ :\ M \to M' \\ \ \ H(O,\ K)\ :\ M' \to M'' \end{array}\right\} \Rightarrow M'' = H\Re(M)$$

បានន័យថា	$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ H(O,\ K) : M \to M' \\ \ \ \Re(O,\ \alpha) : M' \to M'' \end{array}\right\} \text{នាំឱ្យ}\quad M'' = \Re H(M)$$

បានន័យថា	$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

លំហាត់

1. តើបំលែងនីមួយៗដែលប្លែងចំណុច $P(x, y)$ ទៅចំណុច $P'(x', y')$ នៅលើប្លង់មួយដែលបញ្ជាក់បំលែងលីនេអ៊ែរ ឬមិនបំលែងលីនេអ៊ែរខាងក្រោម ៖

   ក. ចំណុច P' គឺជាចំណុចឆ្លុះទៅនឹងចំណុច P ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $x = 1$ ។

   ខ. ចំណុច P' ជាចំណុចកែងទៅនឹងបន្ទាត់គូសពីចំណុច P ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

   គ. ចំណុច P' ជាចំណុចដែលបានដោយការបំលែងចំណុច P តាមវ៉ិចទ័រ $(1, -2)$ ។

   ឃ. ចំណុច P' ជាចំណុចដែលបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច P ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស 2 ហើយប្រសព្វទៅនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

2. យក f ជាបំលែងលីនេអ៊ែរ ដែលប្លែងពីរចំណុច $(1, 0)$ និង $(0, 1)$ ទៅចំណុច $(-1, 2)$ និង $(3, 1)$ ។

   ក. រកម៉ាទ្រីសនៃ f ។

   ខ. រកភាពនៃចំណុច $(-3, 2)$ តាម f ។

   គ. រករូបភាពនៃចំណុច $(5, -3)$ តាមបំលែងច្រាសនៃ f ។

3. គេឱ្យបំលែងលីនេអ៊ែរ f ។ រក $f(3\vec{u}-2\vec{v})$ ចំពោះ $f(\vec{u}) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ និង $f(\vec{v}) = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ ។

4. តើរូបអ្វី ដែលប្លង់មួយប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ ដែលបង្ហាញដោយម៉ាទ្រីសខាងក្រោម :

   ក. $\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}2 & 1\\6 & 3\end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

5. រករូបធរណីមាត្រដែលបន្ទាត់ $2x-y+3 = 0$ ប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ $(x, y) \to (3x-y, -2x+y)$ ។

6. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ ដែលប្លែងដោយពីរចំណុច $(2, 1)$ និង $(-1, 3)$ ទៅចំណុច $(8, -5)$ និង $(-11, 6)$ រៀងគ្នា។

7. រករូបភាពនៃចំណុច $(-6, 7)$ តាមបំលែងបណ្តាក់ $g \circ f^{-1}$ ដែលឱ្យដោយម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ f និង g គឺ $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -3\end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix}-2 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}$ រៀងគ្នា។

លំហាត់ជំពូក

1. រកតម្លៃនៃ x និង y ដែល $x\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}^3$ ពិត ។

2. រកតម្លៃ x និង y ដែលម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}x&5\\-7&y\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃខ្លួនវា ។

3. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ k ដែលប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}2x+3y=kx\\4x+3y=ky\end{cases}$ មានចម្លើយផ្សេងទៀត $x=y=0$ ។

4. បង្ហាញថា $ps-qr=(ad-bc)(a'd'-b'c')$ បើ $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}$ ។

5. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងថាំងដែលប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ ប្លែងទៅប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ។

6. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងទៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៅលើបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ ទៅចំណុច $(-1,\ 1)$ ។

7. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងទៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់លើប្លង់ទៅបន្ទាត់ $y=2x$ ។

8. យក L ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចគល់តម្រុយ ហើយបង្កើតបានមុំ θ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

   ក. យក P' ជាចំណុចឆ្លុះគ្នាជាមួយចំណុច P ធៀបទៅនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយបំលែងវិល ជុំវិញគល់តម្រុយតាមមុំ 2θ ។ បង្ហាញថា P' ស៊ីមេទ្រីទៅនឹង P ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ L ។

   ខ. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបង្ហាញពីការឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ L ។

9. គេតាងប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ។ តើរូបនៃ L ប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរដែល បញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}4&-3\\-2&2\end{bmatrix}$ គឺជារូបអ្វី ?

10. យក $\begin{bmatrix}-2&a\\a&0\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរ f ដែល $a\neq 0$ ។

   ក. តើរូបអ្វីដែលអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអ័ក្សអរដោនេប្លែងតាម f ?

   ខ. បង្ហាញថាមានបន្ទាត់ពីរកាត់តាមគល់តម្រុយដែលមិនប្លែងតាម f ហើយវាប្រសព្វគ្នាបាន មុំកែង ។

11. រកតម្លៃនៃ a និង b បើបន្ទាត់ $3x-4y+1=0$ ប្លែងទៅបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}$ ។

12. បន្ទាត់ពីរ $x+y=1$ និង $2x-y=1$ ប្លែងទៅនីមួយៗផ្សេងទៀតតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ f ។ រកម៉ាទ្រីស f ។

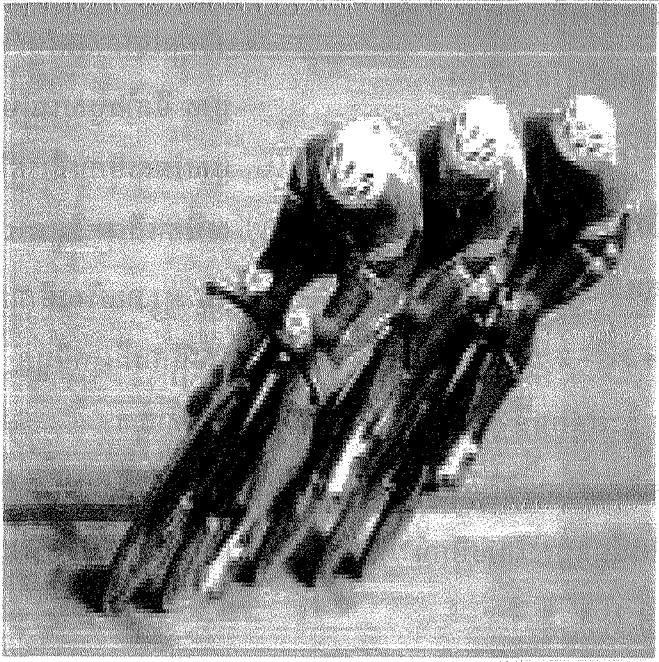
13. បើចំណុច P_1 និង P_2 ប្លែងទៅចំណុច P'_1 និង P'_2 តាមបំលែងលីនេអ៊ែរ $f:(x,\ y)\rightarrow ax+by,(\ cx+dy)$ ហើយបើ $P_1P_2 = P'_1P'_2$ ពិតនោះ $a^2+c^2=b^2+d^2=1$ និង $ab+cd=0$ ។

14. យក f ជាបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}$ ។ រកសមីការនៃបន្ទាត់ L_1 និង L_2 បើ L_1 ប្លែងទៅ L_2 តាម f ហើយ L_1 និង L_2 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $P(0,\ 1)$ ។

PROEUS DARA

ជំពូក 5 លីមីត និងដេរីវេ

❶ អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះសមីការនិងវិសមីការ



នៅក្នុងជំពូកនេះ គេចាប់ផ្ដើមសិក្សាពីបញ្ញត្តិមូលដ្ឋាននៃលីមីតនិងប្រមាណវិធីលើលីមីតដែលជាមធ្យោបាយដ៏សំខាន់សម្រាប់ឈានទៅសិក្សាបញ្ញត្តិនៃដេរីវេនិងប្រមាណវិធីលើដេរីវេនៃអនុគមន៍ ។ បន្ទាប់ពីទទួលបានបញ្ញត្តិ លីមីត ដេរីវេ និងបំណិនក្នុងការគណនាលីមីត ដេរីវេ គេនឹងអាចប្រើចំណេះដឹង និងបំណិនទាំងនោះក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចមួយ ការសិក្សាអថេរភាពសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍សនិទានងាយៗ មួយចំនួន ការគណនាតម្លៃអតិបរមា តម្លៃអប្បបរមា ការគណនាល្បឿននៃចលនា ហើយលើសពីនេះទៅទៀត គេឈានទៅប្រើក្រាប តាងអនុគមន៍សម្រាប់ដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការមួយចំនួនទៀត ។

ការអនុវត្តទាំងអស់នេះ អាចឆ្លុះបញ្ចាំងឱ្យឃើញពីអត្ថន័យពេញលេញនិងសារប្រយោជន៍នៃគណិតវិទ្យាចំពោះវិទ្យាសាស្ត្រនិងការដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាខ្លះក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ ។

មេរៀនទី 1

អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះសមីការនិងវិសមីការ

1. អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះសមីការ

ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គេអាចបញ្ជាក់បានដោយងាយពីអត្ថិភាពឬស ទីតាំងឬសធៀបនឹងចំនួននិងចំនួនឬសនៃសមីការ $f(x) = \lambda$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ λ ។

វត្ថុបំណង

- សិក្សាទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រពីអត្ថិភាពឬស ទីតាំងឬសធៀបនឹងចំនួននិងចំនួនឬសនៃសមីការដឺក្រេទីបីនិងសមីការដឺក្រេទីបួន ដោយប្រើក្រាប ។
- ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទីបីនិងវិសមីការដឺក្រេទីបួន ដោយប្រើដេរីវេ និងក្រាប ។
- បង្ហាញវិសមីការដឺក្រេទីបីនិងទីបួន ដោយប្រើដេរីវេ និងក្រាប ។

1.1 អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះសមីការដឺក្រេទីបី

ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍

$y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ មានក្រាប C ។

ក. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាតាមក្រាភិចទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ λ អត្ថិភាពនិងចំនួនឬសនៃសមីការ $x^3 + 3x^2 - 2 = \lambda$ ។

ក. សង់ក្រាបនៃ f :

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

$f'(x) = 0$, $x = 0$, $x = -2$

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $f(0) = -2$

ចំពោះ $x = -2$ គេបាន $f(-2) = 2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

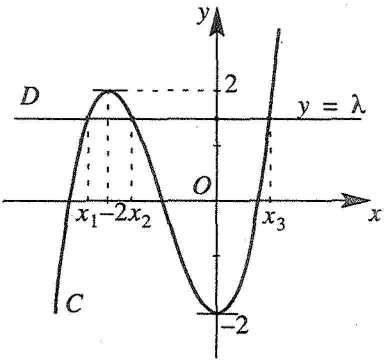
$y = 0 \ , x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

$x^3 + x^2 + 2x^2 - 2 = 0$

$x^2(x+1) + 2(x^2-1) = 0$

$(x+1)(x^2+2x-2) = 0$

$x = -1 \ , \ x = -1-\sqrt{3} = 2.7 \ , \ x = -1+\sqrt{3} = 0.7$



ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ λ អត្ថិភាពនិងចំនួនឫសនៃសមីការ :

គេបាន $x^3+3x^2-2 = \lambda$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ $D : y = \lambda$ ។

សង់បន្ទាត់ D នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ហើយនៅត្រង់ផ្នែកណាមួយដែលជួបក្រាប C បានច្រើនចំណុចបំផុត ។

ចំនួនឫសនៃសមីការ ស្មើនឹងចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាង C និង D ។

- បើ $\lambda > 2$ នោះសមីការមានឫស 1
- បើ $\lambda = 2$ នោះសមីការមានឫសឌុបមួយនិងឫសមួយផ្សេងទៀត
- បើ $-2 < \lambda < 2$ នោះសមីការមានឫស 3
- បើ $\lambda = -2$ នោះសមីការមានឫសឌុបមួយនិងឫសមួយផ្សេងទៀត
- បើ $\lambda < -2$ នោះសមីការមានឫស 1 ។

លំហាត់គំរូ សិក្សាតាមក្រាភិចទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនិងទីតាំងឫសនៃសមីការ $x^3-3x-m = 0$ ធៀបនឹងចំនួន 0 និង 1 ។

ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^3-3x$

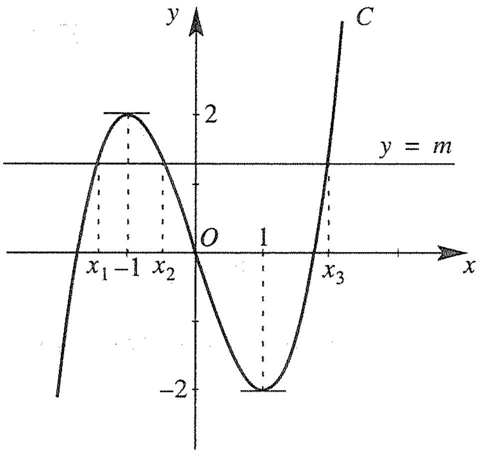
$y' = 3x^2-3$

$y' = 0 \ , \ x = \pm 1$

ចំពោះ $x = -1$ គេបាន $y = 2$

$x = 1$ គេបាន $y = -2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$



ជំហានទី 2 : បំប្លែងសមីការឱ្យមានរាង $f(x) = m$

ជំហានទី 3 : សង់បន្ទាត់ដេកមានសមីការ $y = m$ នៅក្នុងតម្រុយតែមួយហើយ នៅត្រង់ផ្នែកណាដែលបន្ទាត់ជួបក្រាបបានច្រើនចំណុចបំផុត ។

ជំហានទី 4 : ប្រើក្រាបដើម្បីសិក្សាទៅតាមតម្លៃ m ពីអត្ថិភាពនិងទីតាំងឬសធៀប នឹងចំនួន 0 និង 1 ។

- បើ $m > 2$ នោះសមីការមានឬស x_3 ដែល $0 < 1 < x_3$
- បើ $m = 2$ នោះសមីការមានឬសដែល $x_1 = x_2 = -1 < 0 < 1 < x_3$
- បើ $0 < m < 2$ នោះសមីការមានឬសដែល $x_1 < x_2 < 0 < 1 < x_3$
- បើ $m = 0$ នោះសមីការមានឬសបី $x_1 < x_2 = 0 < 1 < x_3$
- បើ $-2 < m < 0$ នោះសមីការមានឬសដែល $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$
- បើ $m = -2$ នោះសមីការមានឬសដែល $x_1 < 0 < 1 = x_2 = x_3$
- បើ $m < -2$ នោះសមីការមានឬសដែល $x_1 < 0 < 1$ ។

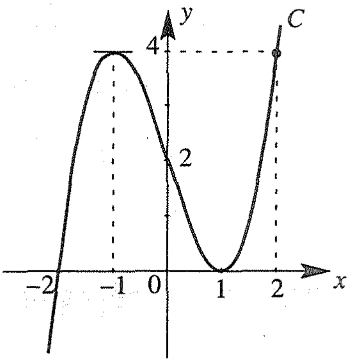
ជាទូទៅ សមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = \lambda$ មានឬសជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វ រវាងក្រាបនៃ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ និងបន្ទាត់មានសមីការ $y = \lambda$ ។

ប្រតិបត្តិ អនុគមន៍ $y = x^3 - 3x + 2$ មានក្រាប C ។

រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការ $x^3 - 3x + 2 = a$:

ក. មានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

ខ. មានឫសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នានិងឫសអវិជ្ជមានមួយទៀត ។



1.2 អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះសមីការបីការេ

ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $y = x^4 - 2x^2$ មានក្រាប C ។

ក. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ ។

ខ. ដោយប្រើក្រាប (C) សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនិងចំនួនឫសនៃសមីការ $x^4 - 2x^2 - m = 0$ ។

ក. សង់ក្រាប C :

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$

ចំពោះ $x = 0$, $y = 0$ និងចំពោះ $x = \pm 1$, $y = -1$ ។

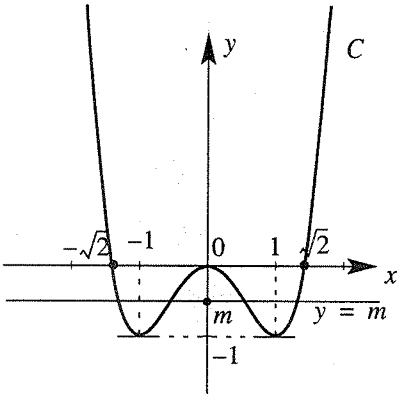
សញ្ញានៃ y' :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

$x = 0$ នាំឱ្យ $y = 0$, $y = 0$, $x^2(x^2 - 2) = 0$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$



បើ $m>0$ នោះសមីការមានឫស 2

បើ $m=0$ នោះសមីការមានឫស 3 គឺ 0 , $\pm\sqrt{2}$

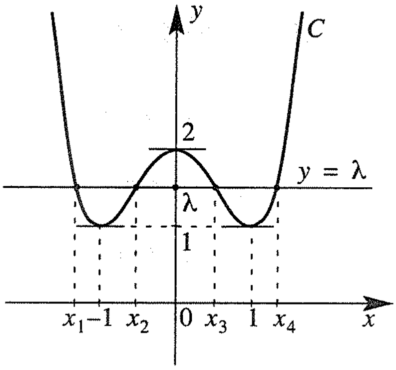
បើ $-1<m<0$ នោះសមីការមានឫស 4

បើ $m=-1$ នោះសមីការមានឫសឌុប 2

បើ $m<-1$ នោះសមីការគ្មានឫស ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^4-2x^2+2$ និងក្រាប C :

សិក្សាទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ λ អត្ថិភាព និងទីតាំងឫសនៃសមីការ $x^4-2x^2=\lambda-2$ ធៀបនឹងចំនួន -1 និង 1 តាមក្រាប ។



ចម្លើយ ***ជំហានទី 1*** : បម្លែងសមីការជារាង

$$x^4-2x^2+2=\lambda$$

ជំហានទី 2 : សង់បន្ទាត់ដេកមានសមីការ $y=\lambda$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ ហើយនៅត្រង់ផ្នែកណាដែលអាចជួបក្រាបបានច្រើនចំណុចជាងគេ ។

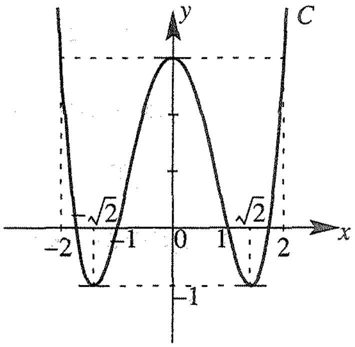
ជំហានទី 3 : សិក្សាលើក្រាបទៅតាមតម្លៃ λ :

- បើ $\lambda>2$ នោះសមីការមានឫសដែល $x_1<-1<1<x_2$
- បើ $\lambda=2$ នោះសមីការមានឫស ដែល $x_1<-1<x_2=x_3=0<1<x_4$
- បើ $1<\lambda<2$ នោះសមីការមានឫស ដែល $x_1<-1<x_2<x_3<1<x_4$
- បើ $\lambda=1$ នោះសមីការមានឫស ដែល $x_1=x_2=-1<x_3=x_4=1$
- បើ $\lambda<1$ នោះសមីការគ្មានឫសទេ ។

ជាទូទៅ សមីការ $ax^4+bx^2+c=\lambda$ មានឫសជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនៃ $y=ax^4+bx^2+c$ និងបន្ទាត់មានសមីការ $y=\lambda$ ។

 PROEUS DARA

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^4 - 4x^2 + 3$ ដូចខាងក្រោម ៖



រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $x^4 - 4x^2 = m - 3$ ៖

ក. មានឫសបួនផ្សេងគ្នា ។

ខ. មានឫសពីរផ្សេងគ្នានៅក្រៅចន្លោះ $[-2,\ 2]$ ។

2. អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះវិសមីការ

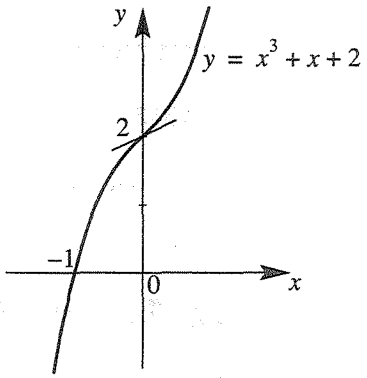
2.1 អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះវិសមីការដឺក្រេទីបី

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថាវិសមីការ $x^3 + x + 2 > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x > -1$ ។

របៀបទី 1 ៖ ប្រើប្រាស់អនុគមន៍ $y = x^3 + x + 2$

$$y' = 3x^2 + 1 > 0 \quad , \quad y'' = 6x \quad , \quad y'' = 0 \ , \ x = 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



$x = 0 \ , \ y = 2$

$y = 0 \ , \ x^3 + x + 2 = 0$

ឬ $(x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \ , \ x = -1$

តាមក្រាបគ្រប់ចំណុច $(x,\ y)$ ដែលមាន $y > 0$ ត្រូវស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយត្រូវគ្នានឹង $x > -1$ ។

គេបាន $y = x^3 + x + 2 > 0$ ចំពោះ $x > -1$ ។

ដូចនេះ វិសមីការ $x^3 + x + 2 > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x > -1$ ។

របៀបទី 2 ៖ ប្រើទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = x^3 + x + 2$ កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

គេមាន ៖ $y(-1) = (-1)^3 + (-1) + 2 = 0$

$x > -1 \ , \ y(x) > y(-1)$ (ព្រោះអនុគមន៍កើន)

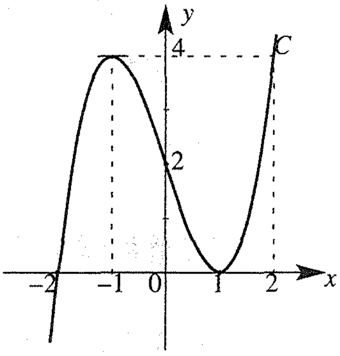
$y(x) > 0$

ដូចនេះ វិសមីការ $x^3+x+2>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x>-1$ ។

លំហាត់គំរូ អនុគមន៍ $y = f(x) = x^3-3x+2$ មានក្រាប C ។

ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $x^3-3x+2<0$ តាមក្រាប ។

ខ. បង្ហាញថា $0\le x^3-3x+2\le 4$ ចំពោះ $x\in[-2, 2]$ ។



ចម្លើយ ក. តាមក្រាប គ្រប់ចំណុច (x, y) នៃក្រាបដែលមាន $y<0$ ត្រូវស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយត្រូវគ្នានឹង $x<-2$ ។ ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំឬស $S = (-\infty, -2)$ ។

ខ. ***របៀបទី 1*** : តាមក្រាបចំណុច (x, y) នៃក្រាបដែលមាន $x\in[-2, 2]$ ត្រូវស្ថិតលើក្រាបដែលនៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ជួបអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = -2$ $x = 1$ ហើយជួបបន្ទាត់ $y = 4$ ត្រង់ $x = -1$ និង $x = 2$ ។

ដូចនេះ $0\le y = x^3-3x+2\le 4$

ចំពោះ $x\in[-2, 2]$ ។

របៀបទី 2 : ដោយមិនប្រើក្រាប (ករណីគ្មានក្រាប) :

$y' = 3x^2-3$

$y' = 0$, $x = \pm 1$

$x = -1$, $y = 4$

$x = 1$, $y = 0$

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		+		+	0	−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$

តាមតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ខាងលើ គេបាន : $0\le x^3-3x+2\le 4$ ចំពោះ $x\in[-2,\ 2]$ ។

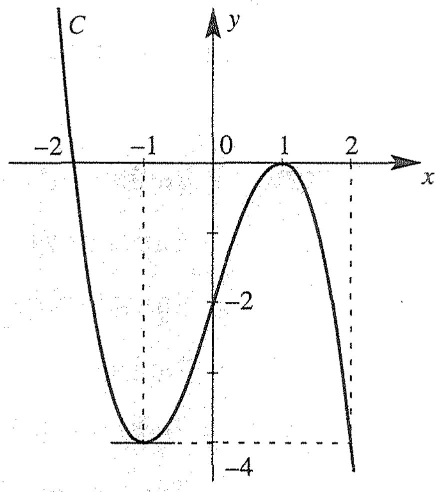
ជាទូទៅ - វិសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d>0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃ អាប់ស៊ីស x នៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

- វិសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d<0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃ អាប់ស៊ីស x នៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

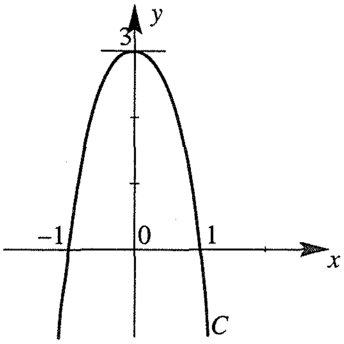
ប្រតិបត្តិ អនុគមន៍ $y=-x^3+3x-2$ មានក្រាប C ។

ក. រកសំណុំឫសនៃវិសមីការ $-x^3+3x-2\le 0$ តាមក្រាប ។

ខ. បង្ហាញថា $-4\le -x^3+3x-2\le 0$ ចំពោះ $-2\le x\le 2$ ។



2.2 អនុវត្តន៍ដេរីវេចំពោះវិសមីការដែលអង្គទី 1 ជាកន្សោមប៊ីការេ

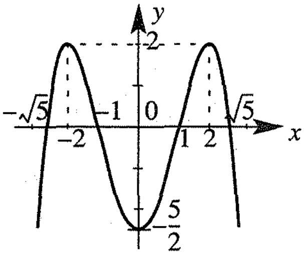


ឧទាហរណ៍ គេឱ្យក្រាប C នៃ $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ ។

រកសំណុំឫសនៃវិសមីការ $-x^4 - 2x^2 + 3 \geq 0$ តាមក្រាភិច ។

តាមក្រាប ចំណុច (x, y) នៃក្រាបដែលមាន $y \geq 0$ ត្រូវស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើ ឬជួបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយត្រូវគ្នានឹង $-1 \leq x \leq 1$ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំឫស $S = [-1, 1]$ ។



លំហាត់គំរូ អនុគមន៍ $y = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}$ មានក្រាប C ។

ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $-\frac{1}{x}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2} < 0$ តាមក្រាប ។

ខ. បង្ហាញថា $0 < -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2} \leq 2$ ចំពោះ $x \in (-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$ តាមក្រាប ។

ចម្លើយ ក. តាមក្រាបវិសមីការ $-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2} < 0$ មានសំណុំឫស $S = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ ។

ខ. តាមក្រាបចំណុច (x, y) នៃក្រាប C ដែលមាន $0 < y \leq 2$ ត្រូវស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = 2$ ដែលត្រូវគ្នានឹង $x \in (-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$

ដូចនេះ $0 < -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2} \leq 2$ ចំពោះ $x \in (-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$

ជាទូទៅ

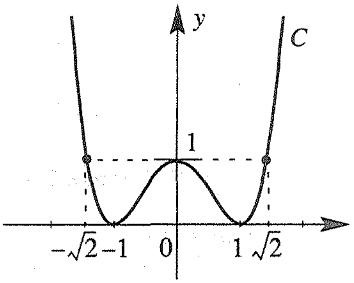
- វិសមីការ $ax^4 + bx^2 + c > 0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃអាប់ស៊ីស x នៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = ax^4 + bx^2 + c$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។
- វិសមីការ $ax^4 + bx^2 + c < 0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃអាប់ស៊ីស x នៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = ax^4 + bx^2 + c$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ប្រតិបត្តិ អនុគមន៍ $y = x^4 - 2x^2 + 1$ មានក្រាប C ។

ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $x^4 - 2x^2 + 1 > 0$ តាមក្រាប ។

ខ. បង្ហាញថា $0 \le x^2 - 2x^2 + 1 \le 1$

ចំពោះ $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ។



មេរៀនសង្ខេប

- សមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = \lambda$ មានឫសជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនៃ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ និងបន្ទាត់ $y = \lambda$ ។
- សមីការ $ax^4 + bx^2 + c = \lambda$ មានឫសជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនៃ $y = ax^4 + bx^2 + c$ និងបន្ទាត់ $y = \lambda$ ។
- វិសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d > 0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃអាប់ស៊ីស x នៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។
- វិសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d < 0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃអាប់ស៊ីស x នៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមមន៍ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។
- វិសមីការ $ax^4 + bx^2 + c > 0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃអាប់ស៊ីស x នៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = ax^4 + bx^2 + c$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។
- វិសមីការ $ax^4 + bx^2 + c < 0$ មានសំណុំឫសជាសំណុំតម្លៃអាប់ស៊ីសនៃចំណុចនៅលើក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = ax^4 + bx^2 + c$ ដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។
- ក្នុងការដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទីបី ឬវិសីមការដឺក្រេទីបួន គេអាចប្រើ :
  - ក្រាបតាងអនុគមន៍ដឺក្រេទីបី ឬអនុគមន៍ដឺក្រេទីបួន
  - តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទីបី ឬអនុគមន៍ដឺក្រេទីបួន ។

លំហាត់

1. អនុគមន៍ $y = x^3 - 3x^2$ មានក្រាប C ។

   ក. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ ។

   ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ពីអត្ថិភាពនិងចំនួនឫសនៃសមីការ $x^3 - 3x^2 = m$ តាមក្រាប ។

2. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 6x + 5$ ។

   ក. សង់ក្រាបនៃ f ។

   ខ. សិក្សាលើក្រាបទៅតាមតម្លៃ a ពីអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $x^3 - 6x + 5 - a = 0$ ។

3. គេឱ្យសមីការ $2x^3 - 3x^2 - 12x - k = 0$ ដែលមានអញ្ញាត x និងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ k ។

   ក. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

   ខ. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នានិងឫសអវិជ្ជមានមួយទៀត ។

4. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 3x + 1$ មានក្រាប C ។

   ក. សង់ក្រាប C នៃ f ។

   ខ. សិក្សាលើក្រាបទៅតាមតម្លៃ p ពីអត្ថិភាពនិងទីតាំងឫសនៃសមីការ $f(x) = p$ ធៀបនឹងចំនួន -1 និង 1 ។

5. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4$ ។

   ខ. សិក្សាលើក្រាបទៅតាមតម្លៃ m ពីអត្ថិភាពនិងទីតាំងឫសនៃសមីការ $\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4 - m = 0$ ធៀបនឹង -1 និង 2 ។

6. គេឱ្យសមីការ $-2x^4 + 3x^2 - 1 = a$ ។

   ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសបួនផ្សេងគ្នា ។

   ខ. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការគ្មានឫស ។

7. ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ ។

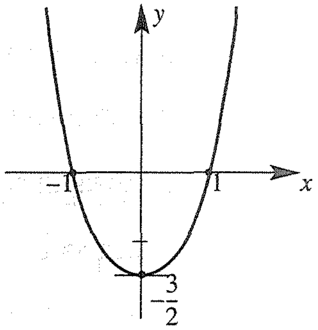
   ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ $f(x) + 1 \le 0$ តាមក្រាប ។

8. អនុគមន៍ $y = x^3 + 3x^2 - 4$ មានក្រាប C ។

ក. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ ។

ខ. បង្ហាញថា $x^3 + 3x^2 - 4 \le 0$ ចំពោះ $x \le -2$ ។

9. គេឱ្យក្រាប C នៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$ ។



ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2} \ge 0$ តាមក្រាប ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2} < 0$ ចំពោះ $x \in (-1,\ 1)$ ។

10. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$ ។

ក. សង់ក្រាបនៃ f ។

ខ. ដោះស្រាយទ្វេវិសមីការ $-2 \le f(x) \le -1$ តាមក្រាប ។

គ. បង្ហាញថា $f(x) < -2$ ចំពោះ $x \in (-\infty,\ -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\ +\infty)$ តាមក្រាប ។

11. ក. សង់ក្រាប C_1 នៃ $y = 3x^4 + 1$ និង C_2 នៃ $y = 8x^3 - 18x^2$ នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ខ. បង្ហាញថា $3x^4 + 1 > 8x^3 - 18x^2$ ចំពោះ $x \ge 0$ តាមក្រាប ។

គ. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 1$ និងគណនា $f(0)$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $f(x) > 0$ ចំពោះ $x \ge 0$ ហើយទាញបញ្ជាក់ថា $3x^4 + 1 > 8x^3 - 18x^2$ ចំពោះ $x \ge 0$ ។

លំហាត់ជំពូក

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2$ និង h ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។ រកតម្លៃ α ដើម្បីឱ្យ $f(x_0 + h) = f(x_o) + h \cdot f'(x_0 + \alpha h)$ ។

2. បន្ទាត់ T មួយប៉ះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^3$ ត្រង់ចំណុច M មួយ ហើយជួបអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងអ័ក្សអរដោនេរៀងគ្នាត្រង់ចំណុច A និង B ។ រកផលធៀប $AM : MB$ ។

3. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 2$ ។

ក. គណនាដេរីវេ y' និងសិក្សាសញ្ញានៃ y' ។

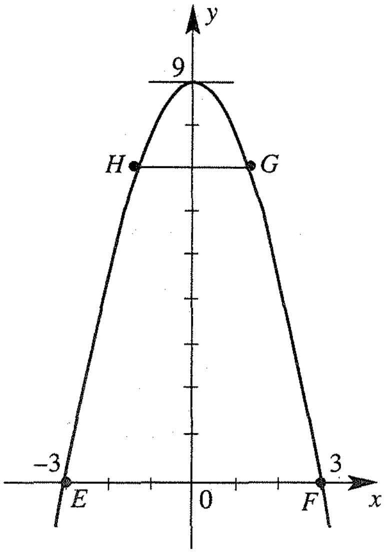
ខ. សង់តារាងអថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍ y ។

4. ប៉ារ៉ាបូលតាង $y = 9 - x^2$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច E និង F ។

ចតុកោណព្នាយ $EFGH$ ចារឹកក្នុងប៉ារ៉ាបូល ហើយមាន $[EF]$ ជាបាតធំ និង $[GH]$ ជាបាតតូច ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច G និង H ដើម្បីឱ្យចតុកោណព្នាយមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតនោះ ។



5. ក្រាប C_1 នៃអនុគមន៍ $y = x^3 + ax$ និង C_2 នៃ $y = x^2 + bx + c$ កាត់គ្នាត្រង់ $A(1, 2)$ ហើយមានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ចំណុចនោះ ។

6. ក. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a, b និង c ។

ខ. សង់ក្រាប C_1, C_2 និងបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A ។

7. ក. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2kx$ គ្មានបរមា ។

ខ. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y = x^4 + 2ax^2 + a$ មានអតិបរមានិងអប្បបរមា ។

8. រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = 2x^3 - 3ax^2 + 1$ លើចន្លោះ $0 \le x \le 3$ ដែល $a > 0$ ។

9. គេឱ្យចតុមុខនិយ័ត $ABCD$ មួយដែលមានទ្រនុង 12cm ។

ចំណុច M, N, P ស្ថិតនៅលើទ្រនុង $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ រៀងគ្នា ហើយមានចម្ងាយ x ដូចគ្នាពីកំពូល A ។ ចំណុច M', N', P' ជាចំណោលកែងនៃ M, N, P រៀងគ្នាទៅលើបាត BCD ។ រកតម្លៃ x បើគេដឹងថាព្រិសត្រីមុខនិយ័ត $MNP \cdot M'N'P'$ មានមាឌធំបំផុត ។

10. គេឱ្យសមីការ $2x^3 - 3x^2 - 12x - k = 0 \quad (E)$ ។

ក. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ (E) មានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ $2x^3 - 3x^2 - 12x \le 0$ តាមក្រាប ។

11. អនុគមន៍ $f(x) = x^2(6 - 3x^2)$ មានក្រាប C ។

ក. រកតម្លៃ P ដើម្បីឱ្យសមីការ $f(x) = P$ មានឫសបួនផ្សេងគ្នាតាមក្រាប ។

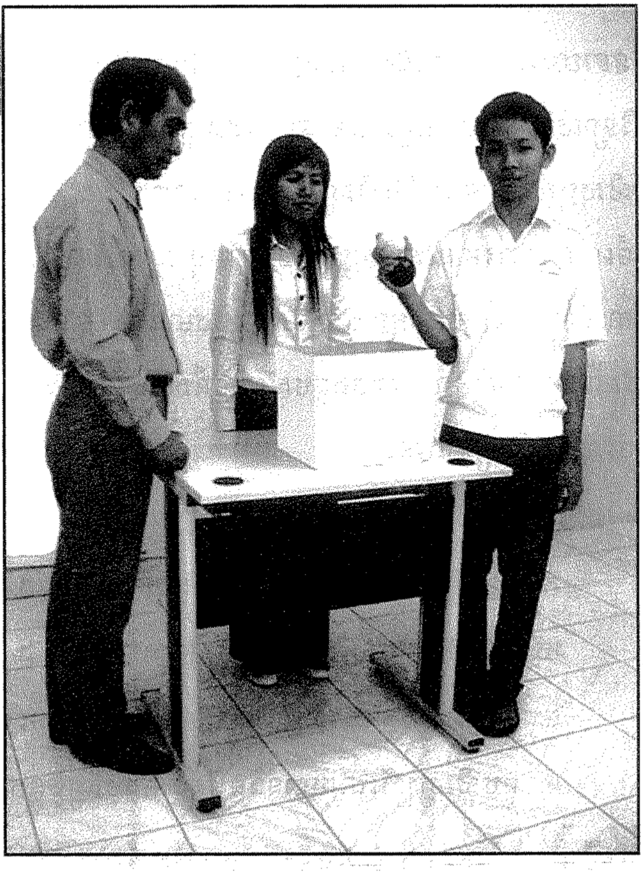
ខ. បង្ហាញថា $0 \le 6x^2 - 3x^4 < 3$ ចំពោះ $x \in (-1, 1)$ ។

PROEUS DARA

ជំពូក 6

ប្រូបាប

❶ ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ



ការគណនាប្រូបាប គឺជាផ្នែកមួយដែលមានការទាក់ទាញអារម្មណ៍ខ្លាំងជាងគេនិងមានការពិបាកតិចជាងគេនៅក្នុងគណិតវិទ្យា ។ បញ្ហាទាក់ទងនឹងល្បែងចៃដន្យ ជាពិសេសល្បែងបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ ក៏ដូចជាបញ្ហាទាក់ទងនឹងការរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់មនុស្សក្នុងពិភពលោក ជាប្រភពនៃការគណនាប្រូបាប ។ ការសិក្សាស្រាវជ្រាវពីការគណនាប្រូបាបត្រូវបានយកចិត្តទុកដាក់ដោយគណិតវិទូជាច្រើន ដូចជា Blaise, Pascal, Cardan, Feunat, Bernoullè, Laplace, Polsson, . . . ជាពិសេសគណិតវិទូរុស្ស៊ី AN Kolmogorov នៅឆ្នាំ 1933 បានសរសេររចនាសម្ព័ន្ធស្វ័យសត្យជាទ្រឹស្តីប្រូបាប ។

មេរៀនទី 1

ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ

1. ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ

1.1 និយមន័យ

វត្ថុបំណង

- កំណត់និយមន័យនៃប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ
- បង្ហាញភាពមិនអាស្រ័យគ្នាក្នុងប្រូបាប
- បង្ហាញរូបមន្តប្រូបាបសរុប

ឧទាហរណ៍ គេដឹងថាសិស្សដែលរៀនចប់ចេញពីវិទ្យាល័យមួយមានចំនួន 200 នាក់ ដែលក្នុងនោះមានសិស្សស្រី 90 នាក់ និងសិស្សប្រុស 110 នាក់ ។ ក្នុងចំណោមនោះមានតែសិស្សស្រី 27 នាក់ប៉ុណ្ណោះដែលបន្តការសិក្សាទៅឧត្តមសិក្សា ។ ឯសិស្សប្រុសមានតែ 66 នាក់ដែលបន្តការសិក្សា ។ គេចង់ជួបសម្ភាសន៍សិស្សម្នាក់ក្នុងចំណោមសិស្សទាំងនេះ ។

រកប្រូបាបដែលអ្នកសម្ភាសន៍ :

ក. ជួបសិស្សស្រី ខ. ជួបសិស្សប្រុស គ. ជួបសិស្សស្រីដែលបន្តការសិក្សា

ឃ. ជួបសិស្សប្រុសដែលបន្តការសិក្សា ង. ជួបសិស្សបន្តការសិក្សា

ច. ជួបសិស្សបន្តការសិក្សាដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សស្រី

ឆ. ជួបសិស្សស្រីដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សបន្តការសិក្សា ។

ចម្លើយ គេអាចស្រង់ទិន្នន័យទាំងអស់ដាក់ក្នុងតារាង

ភេទ / ការសិក្សា	ស្រី	ប្រុស	សរុប
បន្តការសិក្សា	27	66	93
មិនបន្តការសិក្សា	63	44	107
សរុប	90	110	200 នាក់

តាង S ជាលំហសំណាក

F ជាព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រី

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុស

C ជាព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សបន្តការសិក្សា

$\bar{C}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សមិនបន្តការសិក្សា។

គេបាន ព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រីដែលបន្តការសិក្សា ជាព្រឹត្តិការណ៍ $F \cap C$

ព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុសបន្តការសិក្សា ជាព្រឹត្តិការណ៍ $B \cap C$

គេមាន សិស្សទាំងអស់ 200 នាក់ គេបាន $n(S) = 200$

សិស្សស្រី 90 នាក់ : $n(F) = 90$

សិស្សប្រុស 110 នាក់ : $n(B) = 110$

សិស្សស្រីដែលបន្តការសិក្សា 27 នាក់: $n(F \cap C) = 27$

សិស្សប្រុសដែលបន្តការសិក្សា 66 នាក់: $n(B \cap C) = 66$

សិស្សបន្តការសិក្សាមានស្រី 27 ប្រុស 66 នាក់: $n(C) = 27 + 66 = 93$

ក. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រី $P(F) = \dfrac{n(F)}{n(S)} = \dfrac{90}{200} = 0.45$

ខ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុស $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{110}{200} = 0.55$

គ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រីបន្តការសិក្សា $P(F \cap C) = \dfrac{n(F \cap C)}{n(S)} = \dfrac{27}{200} = 0.135$

ឃ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុសបន្តការសិក្សា

$$P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{66}{200} = 0.33$$

ង. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សដែលបន្តការសិក្សា $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{93}{200} = 0.465$

ច. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បន្តការសិក្សា ដោយដឹងមុនថាជាសិស្សស្រី

បើគេដឹងមុនថាអ្នកដែលគេចង់ជួបជាសិស្សស្រីនោះ បានន័យថាគេចង់ជួបសិស្សស្រីបន្តការសិក្សាក្នុងចំណោមសិស្សស្រី ដោយចំនួនសិស្សស្រីបន្តការសិក្សាមាន $n(F \cap C) = 27$ នាក់ ហើយចំនួនសិស្សស្រីមាន $n(F) = 90$ នាក់ នោះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សបន្តការសិក្សាដោយដឹងមុនថាជាសិស្សស្រីគឺ $\dfrac{n(F \cap C)}{n(F)} = \dfrac{27}{90} = 0.30$

ចំពោះផលធៀប $\frac{n(F\cap C)}{n(F)}$ គេអាចសរសេរ :

$$\frac{n(F\cap C)}{n(F)}=\frac{\frac{n(F\cap C)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}}=\frac{P(F\cap C)}{P(F)}=\frac{0.135}{0.45}=0.3$$

ប្រូបាបនេះហៅថាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ C ដោយដឹងថាព្រឹត្តិការណ៍ F បានកើតឡើងគេកំណត់សរសេរ :$P(C/F)$ ឬ $P_F(C)$

ដូចនេះ ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃ C ដោយដឹង F គឺ $P(C/F)=\frac{P(F\cap C)}{P(F)}=0.3$

$P(C/F)$ អានថា : ប្រូបាបនៃ C ដោយដឹង F (ឬ C កើតក្រោយ F)

ឆ. ប្រូបាបដែលជួបសិស្សស្រីដោយបានដឹងមុនថាជាសិស្សបន្តការសិក្សា

បើគេដឹងមុនថាជាសិស្សបន្តការសិក្សានោះ គឺគេចង់ជួបសិស្សស្រីបន្តការសិក្សាក្នុងចំណោមសិស្សបន្តការសិក្សាប្រូបាបនេះជាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ F ដោយដឹងថាព្រឹត្តិការណ៍ C បានកើតឡើង : $P(F/C)=\frac{P(C\cap F)}{P(C)}=\frac{0.135}{0.465}=0.290$

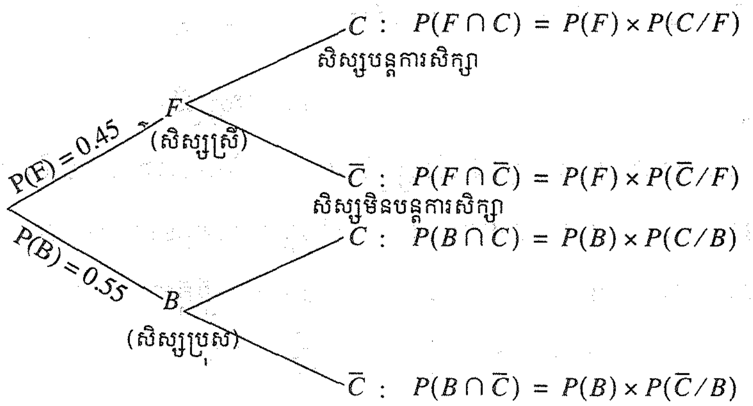
និយមន័យ

- បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ 2 ក្នុងលំហសំណាកមួយដែល $P(A)\neq 0$ នោះប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ដោយដឹង A គឺ :

  $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- គេអាចគណនាបានដូចគ្នា $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $(P(B)\neq 0)$
- តាមរូបមន្តនេះ គេអាចទាញបានប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B

  $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=P(B)\times P(A/B)$

គេអាចប្រើដ្យាក្រាមដើមឈើដើម្បីបង្ហាញប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ :



លំហាត់គំរូ ក្នុងភូមិមួយមានប្រជាជន 85 % បានចាក់ថ្នាំការពារជំងឺឆ្លង ។ ក្នុងចំណោមអ្នកចាក់ថ្នាំការពារ គេឃើញមានអ្នកឆ្លងជំងឺ 2 % និងចំណោមអ្នកមិនចាក់ថ្នាំការពារមាន 1 % មិនឆ្លងជំងឺ ។ រកប្រូបាបដែល :

ក. អ្នកឆ្លងជំងឺដោយដឹងថាបានចាក់ថ្នាំការពារ

ខ. អ្នកចាក់ថ្នាំការពារ ហើយឆ្លងជំងឺ

គ. អ្នកឆ្លងជំងឺដោយដឹងថាមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ

ឃ. អ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ ហើយឆ្លងជំងឺ ។

ង. បើក្នុងភូមិមានប្រជាជន 1000 នាក់ តើអ្នកចាក់ថ្នាំការពារមានប៉ុន្មាននាក់ ? ហើយឆ្លងជំងឺមានប៉ុន្មាននាក់ ? អ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារប៉ុន្មាននាក់ ? អ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ ហើយឆ្លងជំងឺមានប៉ុន្មាននាក់ ?

ចម្លើយ តាង V ជាព្រឹត្តិការណ៍អ្នកចាក់ថ្នាំការពារ

$\bar{V}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍អ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ

M ជាព្រឹត្តិការណ៍អ្នកឆ្លងជំងឺ $\bar{M}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍អ្នកមិនឆ្លងជំងឺ

គេបាន $P(V) = \frac{85}{100} = 0.85$, $P(\bar{V}) = 1 - P(V)$ ព្រោះ $\bar{V}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង V

ក. ប្រូបាបអ្នកឆ្លងជំងឺ ដោយដឹងថាបានចាក់ថ្នាំការពារ

អ្នកឆ្លងជំងឺដោយដឹងថាបានចាក់ថ្នាំការពារ គឺជាអ្នកឆ្លងជំងឺក្នុងចំណោមអ្នកចាក់ថ្នាំការពារដែលមាន 2 % ដូចនេះ ប្រូបាបដែលអ្នកជំងឺដោយដឹងថាបានចាក់ថ្នាំ ជាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ M ដោយដឹងថា V : $P(M/V) = 2\,\% = 0.02$

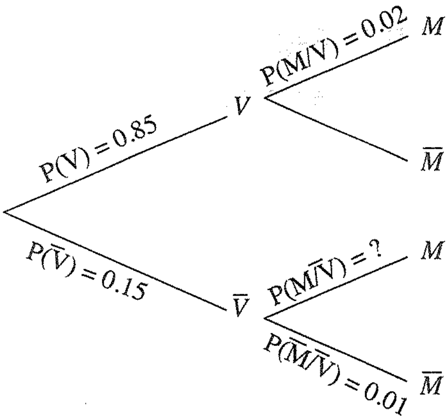
ខ. ប្រូបាបដែលអ្នកចាក់ថ្នាំការពារ ហើយឆ្លងជំងឺ

ព្រឹត្តិការណ៍អ្នកចាក់ថ្នាំការពារ ហើយឆ្លងជំងឺជាព្រឹត្តិការណ៍ $V \cap M$

គេបាន $P(V \cap M) = P(V) \times P(M/V) = 0.85 \times 0.02 = 0.017$

គ. ប្រូបាបដែលអ្នកឆ្លងជំងឺ ដោយដឹងថាមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ

ដើម្បីងាយមើលគេសង់ដ្យាក្រាមដើមឈើ



M : $P(V \cap M) = P(V) \times P(M/V) = 0.85 \times 0.02$
$= 0.017$

M : $P(\bar{V} \cap M) = P(\bar{V}) \times P(M/\bar{V})$

គេដឹងថា អ្នកមិនឆ្លងដោយដឹងថាមិនបានចាក់ថ្នាំការពារមាន 1 % : $P(\bar{M}/\bar{V}) = 0.01$
ព្រឹត្តិការណ៍អ្នកឆ្លងដោយដឹងថាមិនបានការពារ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍អ្នកមិនឆ្លងដោយដឹងថាមិនការពារ : $P(M/\bar{V}) = 1 - P(\bar{M}/\bar{V}) = 1 - 0.01 = 0.99$

ឃ. ប្រូបាបដែលអ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំ ហើយឆ្លងជំងឺ

$P(\bar{V} \cap M) = P(\bar{V}) \times P(M/\bar{V}) = 0.15 \times 0.99 = 0.148$

ង. អ្នកចាក់ថ្នាំការពារហើយឆ្លងជំងឺមានប្រូបាប $P(V \cap M) = 0.017$ ដូចនេះក្នុង 1000 នាក់មានអ្នកឆ្លង 17 នាក់ ។ អ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ ហើយឆ្លងជំងឺមានប្រូបាប $P(\bar{V} \cap M) = 0.148$ ដូចនេះ ក្នុង 1000 នាក់មានអ្នកឆ្លង 148 នាក់ ។

ប្រតិបត្តិ សិប្បកម្មមួយមានម៉ាស៊ីន 2 ផលិតវត្ថុដូចគ្នា ។ គេដឹងថាម៉ាស៊ីនទី 1 ផលិតវត្ថុបាន 45 % ដែលក្នុងនោះមានខូច 3 % និងម៉ាស៊ីនទី 2 ផលិតវត្ថុបាន 55 % ដែលក្នុងនោះមានខូច 2 % ។

ក. តើប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូច ដោយដឹងថាផលិតដោយម៉ាស៊ីនទី 1 ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ខ. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចក្នុងម៉ាស៊ីនទី 1

គ. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចក្នុងម៉ាស៊ីនទី 2

ឃ. បើម៉ាស៊ីនទាំងពីរ ផលិតបានវត្ថុចំនួន 1000 តើម៉ាស៊ីនទី 1 ធ្វើខូចអស់ប៉ុន្មាន ? ម៉ាស៊ីនទី 2 ធ្វើខូចអស់ចំនួនប៉ុន្មាន ?

2. ព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នានិងមិនទាក់ទងគ្នា

ឧទាហរណ៍ ថង់មួយមានឃ្លីខៀវ 4 ចុះលេខ 1, 1, 2 និង 3 និងឃ្លីក្រហម 6 ចុះលេខ 1; 1, 1, 2, 3 និង 4 ។ គេចាប់យកឃ្លីមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ ។

គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ : B : " ឃ្លីយកចេញពណ៌ខៀវ " , A : " ឃ្លីយកចេញមានលេខ 1 " C : " ឃ្លីយកចេញមានលេខ 4 "

- គេឃើញថាឃ្លីទាំងអស់មាន 10 ក្នុងនោះឃ្លីខៀវមាន 4 ហើយឃ្លីលេខ 1 មានចំនួន 5 និងឃ្លីពណ៌ខៀវលេខ 1 មាន 2 គេបាន $P(B) = \dfrac{4}{10}$, $P(A) = \dfrac{5}{10}$,
  $P(B\cap A) = \dfrac{2}{10}$ ដោយ $P(B)\times P(A) = \dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10} = \dfrac{2}{10} = P(B\cap A)$
  បើ $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ នោះគេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B មិនទាក់ទងគ្នា ។
- បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នា នោះគេបាន :
  $$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A)$$
  $$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(A)} = P(B)$$
  ដូចនេះ $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$
- គេឃើញថា $P(C) = \dfrac{1}{10}$, $P(B\cap C) = 0$ ព្រោះ $B\cap C = \varnothing$
  $P(C)\times P(B) = \dfrac{1}{10}\times\dfrac{4}{10} = \dfrac{1}{25} \neq P(B\cap C)$
  គេថាព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ C ទាក់ទងគ្នា ។
  ដោយ $B\cap C = \varnothing$ នោះ B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង ។

ជាទូទៅ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ 2 ដែលមានប្រូបាបមិនសូន្យ

- គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B មិនទាក់ទងគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌណាមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :
  1 . $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ ឬ 2 . $P(A/B) = P(A)$ ឬ 3 . $P(B/A) = P(B)$
- គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ទាក់ទងគ្នា កាលណា
  $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$

សំគាល់ ព្រឹត្តិការណ៍2 មិនអាស្រ័យគ្នាមិនមែនមានន័យថាព្រឹត្តិការណ៍ 2 នោះមិនចុះសម្រុងគ្នាទេ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ដូចគ្នា 2 ព្រមគ្នា ។ តាងA ជាព្រឹត្តិការណ៍ " ផលបូកលេខដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំង2 ចេញជាចំនួនគូ " និងB ជាព្រឹត្តិការណ៍ " គម្លាតរវាងលេខទាំង2 ជាចំនួនគូ " ។

ក. គណនា $P(A)$, $P(B)$ និង $P(A\cap B)$

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា ឬមិនទាក់ទងគ្នា ?

គ. គណនា $P(A/B)$ និង $P(B/A)$

ចម្លើយ លទ្ធផលនីមួយៗក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ដូចគ្នា 2 ព្រមគ្នា ជាគូគ្មានលំដាប់ $\{a,\ b\}$ ដែល a និង b អាចស្មើនឹង 1, 2, 3, 4, 5, 6 ។

គេបានលំហសំណាក $S = \{\{a,\ b\}$ ដែល a និង $b \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}\}$

$$n(S) = 6^2 = 36$$

ផលបូកទាំង 2 ជាចំនួនគូ គឺជាផលបូកលេខដែលអាចស្មើនឹង 2, 4, 6, 8, 10, 12

គេបាន $A = \{(1,1),(1,3),(2,2),(1,5),(2,4),(3,3),(2,6),(3,5),(3,1),(5,1),(4,2),(6,2)$,

$(5,3),(6,4),(4,4),(4,6),(5,5),(6,6)$ $\quad n(A) = 18$

គម្លាតរវាងលេខទាំង 2 អាចស្មើនឹង 2 ឬស្មើនឹង 4 :

$B = \{(1,3),(1,5),(2,4),(2,6),(3,5),(4,6),(3,1),(5,1),(4,2),(6,2),(5,3),(6,4)\}$ $\quad n(B) = 12$

$A\cap B = \{(1,3),(1,5),(2,4),(2,6),(3,5),(4,6),(3,1),(5,1),(4,2),(6,2),(5,3),(6,4)\} = B$

ក. គណនា $P(A)$, $P(B)$ និង $P(A\cap B)$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(A)\times P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

ខ. ដោយ $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$ នោះ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា

គ. គណនា $P(A/B)$ និង $P(B/A)$

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ជាទាក់ទងគ្នា គេបាន :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 \quad , \quad P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

លំហាត់គំរូ 2 ថង់មួយមានប៊ូល ស 3 មានលេខខុសគ្នានិងប៊ូលខ្មៅ 2 មានលេខខុសគ្នា។ គេចាប់យកប៊ូលម្ដងមួយៗចំនួន 2 ដងដោយចៃដន្យចេញពីថង់ ដោយដាក់វិញ។

តាងព្រឹត្តិការណ៍ A : " ចាប់លើកទី 1 បានប៊ូល ស " B : " ចាប់លើកទី 2 បានប៊ូលខ្មៅ " ។

ក. ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A , B និង $A \cap B$

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B អាស្រ័យគ្នាឬទេ ?

គ. គណនា $P(A/B)$ និង $P(B/A)$

ចម្លើយ ក. គណនា $P(A)$, $P(B)$ និង $P(A \cap B)$

គេធ្វើវិញ្ញាសាយកហើយដាក់វិញ គេបានលទ្ធផលនីមួយៗជាចម្លាស់ច្រំដែល 2 ធាតុយកពី 5 ធាតុលំហសំណាក $n(S) = 5^2$

ព្រឹត្តិការណ៍ $n(A) = 3^2 + 3 \times 2 = 15$ ព្រឹត្តិការណ៍ $n(B) = 3 \times 2 + 2^2 = 10$

ព្រឹត្តិការណ៍ $n(A \cap B) = 3 \times 2 = 6$

គេបាន $P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{6}{25}$

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ទាក់គ្នាឬទេ ?

ដោយ $P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{26}$ នោះគេបាន $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ដូចនេះ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

គ. គណនា $P(A/B)$ និង $P(B/A)$

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B មិនទាក់ទងគ្នានោះ គេបាន :

$P(A/B) = P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B/A) = P(B) = \frac{2}{5}$

ប្រតិបត្តិ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ 2 ដងបន្តបន្ទាប់គ្នា។ គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ :

A : " ផលបូកលេខដែលបោះបានជាចំនួនគូ " B : " បោះលើកទី 1 បានលេខ 6 "

C : " បោះលើកទី 1 បានលេខធំជាងលើកទី 2 "

ក. គណនាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ $P(B/A)$, $P(C/B)$ និង $P(C/A)$

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ 2 ខាងក្រោមនេះទាក់ទងគ្នា ឬមិនទាក់ទងគ្នា ?

A និង B A និង C B និង C

3. រូបមន្តប្រូបាបសរុប

ឧទាហរណ៍ (លំហាត់គំរូផ្នែក 1.1)

មានប្រជាជន 85 % បានចាក់ថ្នាំការពារជំងឺឆ្លង ។ 2 % កើតជំងឺឆ្លងដោយដឹងថាចាក់ថ្នាំការពាររួចហើយ ។ 1 % មិនកើតជំងឺឆ្លងដោយដឹងថាមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ ។

ក. គណនាប្រូបាបដែលអ្នកកើតជំងឺឆ្លង

ខ. គណនាប្រូបាបដែលអ្នកបានចាក់ថ្នាំការពារ ដោយដឹងថាកើតជំងឺឆ្លង

ចម្លើយ ក. ប្រូបាបដែលអ្នកកើតជំងឺឆ្លង

ចំនួនអ្នកកើតជំងឺឆ្លង ជាផលបូកចំនួនអ្នកជំងឺដែលចាក់ថ្នាំការពារនិងអ្នកជំងឺដែលមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ

តាងព្រឹត្តិការណ៍ V : “ អ្នកបានចាក់ថ្នាំការពារ ” $\bar{V}$: “ អ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ ”

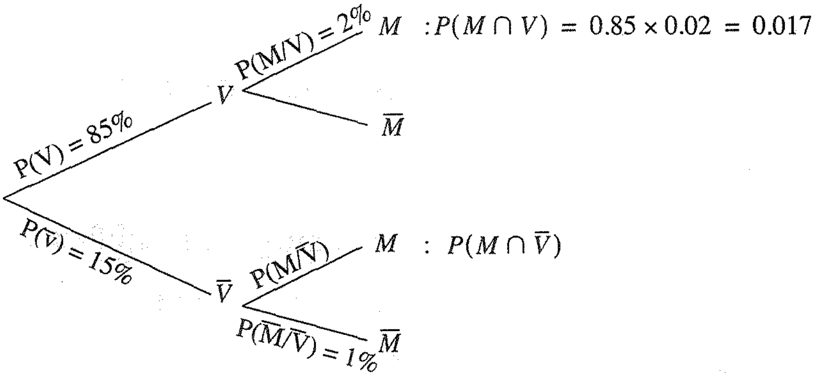
M : “ អ្នកកើតជំងឺឆ្លង ” $\bar{M}$: “ អ្នកមិនឆ្លងជំងឺ ”

អ្នកជំងឺដែលបានចាក់ថ្នាំការពារ ជាព្រឹត្តិការណ៍ $M \cap V$

អ្នកជំងឺដែលមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ ជាព្រឹត្តិការណ៍ $M \cap \bar{V}$

គេបាន $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V})$ ដោយ $P(M \cap V) = P(V) \times P(M/V)$

$$P(M \cap \bar{V}) = P(\bar{V}) \times P(M/\bar{V})$$



$$P(M/\bar{V}) = 1 - P(\bar{M}/\bar{V}) = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

$$P(M \cap \bar{V}) = 0.15 \times 0.99 = 0.1485$$

ដូចនេះ $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V}) = 0.017 + 0.1485$, $P(M) = 0.1655$

អ្នកកើតជំងឺទាំងអស់មាន 16.55 %

- ការរកភាគរយនៃអ្នកកើតជំងឺទាំងអស់ដែលបានចាក់ថ្នាំការពារនិងអ្នកមិនបានចាក់ថ្នាំការពារ ហៅថា រូបមន្តប្រូបាបសរុប : $P(M) = P(M/V)\times P(V) + P(M/\bar{V})\times P(\bar{V})$ ជាប្រូបាបដែលមានមនុស្សម្នាក់នៅក្នុងភូមិត្រូវកើតជំងឺឆ្លង ។

ខ. ប្រូបាបដែលអ្នកបានចាក់ថ្នាំដោយដឹងថាកើតជំងឺ

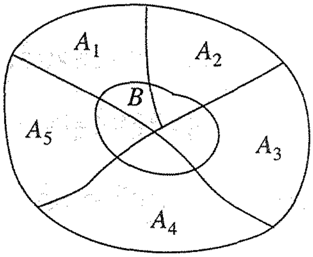
អ្នកបានចាក់ថ្នាំដោយដឹងថាកើតជំងឺ គឺជាអ្នកចាក់ថ្នាំហើយឆ្លងជំងឺក្នុងចំណោមអ្នកកើតជំងឺ ប្រូបាបដែលអ្នកបានចាក់ថ្នាំដោយដឹងថាកើតជំងឺគឺ $P(V/M)$

$$P(V/M) = \frac{P(V\cap M)}{P(M)} = \frac{P(M/V)\times P(V)}{P(M/V)\times P(V) + P(M/\bar{V})\times P(\bar{V})} = \frac{0.017}{0.1655} = 0.1027$$

- តាមការគណនានេះ បានឱ្យដឹងថាភាគរយនៃអ្នកចាក់ថ្នាំការពារហើយឈឺក្នុងចំណោមអ្នកជំងឺគឺ 10.27 %

ការគណនាភាគរយនេះហៅថា ទ្រឹស្តីបទបៃយេស

ជាទូទៅ :



- បើ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នាពីរៗ ក្នុងលំហសំណាកមួយ ហើយមានព្រឹត្តិការណ៍ B មួយកើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ $A_1, A_2, \ldots, A_n$

នោះ $B = (A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\ldots\cup(A_n\cap B)$

$$P(B) = P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + \ldots + P(A_n\cap B)$$

ដោយ $P(A_1\cap B) = P(B/A_1)\times P(A_1)$

គេបាន $P(B) = P(A_1)\times P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\times P(B/A_n)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n}[P(B/A_i)\times P(A_i)]$$

- បើ A_k ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាក នោះ

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}[P(B/A_i)\times P(A_i)]}$$

រូបមន្តប្រូបាបសរុប :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n}[P(B/A_i)\times P(A_i)]$$

ទ្រឹស្តីបទបៃយេស :

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}[P(B/A_i)\times P(A_i)]}$$

លំហាត់គំរូ គេមានម៉ាស៊ីន A, B និង C ផលិតវត្ថុដូចគ្នា។ ម៉ាស៊ីន A ផលិតបាន 50 % B បាន 30 % និង C បាន 20 % ។ គេដឹងថាវត្ថុដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីន A មានខូច 3 % ម៉ាស៊ីន B ខូច 4 % និងម៉ាស៊ីន C ខូច 4 % ។

ក. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូច

ខ. ក្នុងចំណោមវត្ថុខូចចំនួន 1000 តើម៉ាស៊ីន A ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន ? B ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន ? C ខូចចំនួនប៉ុន្មាន ?

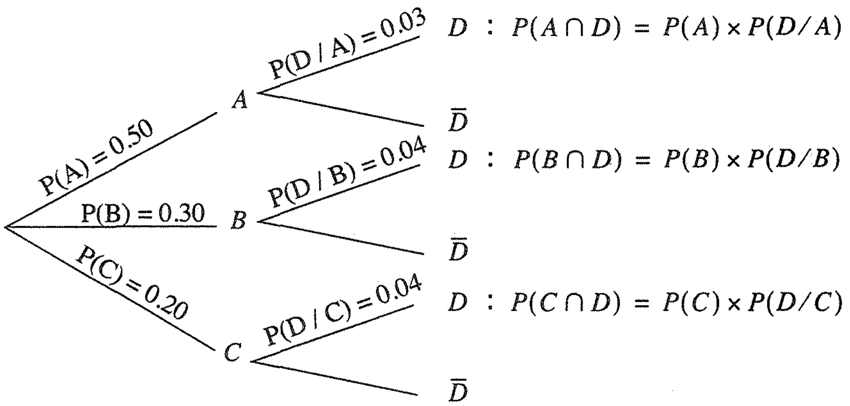
ចម្លើយ តាងព្រឹត្តិការណ៍ A : " ម៉ាស៊ីន A ផលិតវត្ថុ " , B : " ម៉ាស៊ីន B ផលិតវត្ថុ "
C : " ម៉ាស៊ីន C ផលិតវត្ថុ " , D : " វត្ថុខូច "

ក. ប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូច

វត្ថុខូចជាវត្ថុដែលខូច ផលិតក្នុងម៉ាស៊ីន A, B និង C

តាមរូបមន្តប្រូបាបសរុប គេបានប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចគឺ :

$P(D) = P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$



ប្រូបាបដែលវត្ថុខូចផលិតដោយម៉ាស៊ីន A គឺ $P(A\cap D)$

$P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A) = 0.50 \times 0.03 = 0.015$

ប្រូបាបដែលវត្ថុខូចផលិតដោយម៉ាស៊ីន B គឺ $P(B \cap D)$

$P(B \cap D) = P(B) \times P(D/B) = 0.30 \times 0.04 = 0.012$

ប្រូបាបដែលវត្ថុខូចផលិតដោយម៉ាស៊ីន C គឺ $P(D \cap C)$

$P(C \cap D) = P(C) \times P(D/C) = 0.20 \times 0.04 = 0.008$

ដូចនេះ $P(D) = 0.015 + 0.012 + 0.008 = 0.035$ ។

ខ. ចំនួនវត្ថុខូចក្នុងម៉ាស៊ីននីមួយៗក្នុងចំណោមវត្ថុខូច 1000

ប្រូបាបដែលម៉ាស៊ីន A ផលិតវត្ថុ ដោយដឹងថាវត្ថុខូចគឺ $P(A/D)$

ប្រូបាបដែលម៉ាស៊ីន B ផលិតវត្ថុ ដោយដឹងថាវត្ថុខូចគឺ $P(B/D)$

ប្រូបាបដែលម៉ាស៊ីន C ផលិតវត្ថុ ដោយដឹងថាវត្ថុខូចគឺ $P(C/D)$

តាមទ្រឹស្តីបទបៃយេស គេបាន :

$$P(A/D) = \frac{P(D/A) \times P(A)}{P(D)} = \frac{0.03 \times 0.50}{0.035} = 0.428$$

$$P(B/D) = \frac{P(D/B) \times P(B)}{P(D)} = \frac{0.04 \times 0.30}{0.035} = 0.343$$

$$P(C/D) = \frac{P(D/C) \times P(C)}{P(D)} = \frac{0.04 \times 0.20}{0.035} = 0.229$$

ក្នុងចំណោមវត្ថុខូច 1000 :
- ម៉ាស៊ីន A ផលិតវត្ថុខូចបានចំនួន $1000 \times 0.428 = 428$
- ម៉ាស៊ីន B ផលិតវត្ថុខូចបានចំនួន $1000 \times 0.343 = 343$
- ម៉ាស៊ីន C ផលិតវត្ថុខូចបានចំនួន $1000 \times 0.229 = 229$

ប្រតិបត្តិ ក្នុងក្រូចមួយកញ្ចេមានលាយក្រូចបាត់ដំបង 70 % និងក្រូចកំពង់ចាម 30 % ។ គេដឹងថាក្រូចទាំង 2 ប្រភេទនេះ មានផ្លែខ្លះជូរ ផ្លែខ្លះផ្អែម ។ ក្រូចបាត់ដំបងមានក្រូចជូរ 5 % និងក្រូចកំពង់ចាម 9 % ។

ក. រកប្រូបាបដែលគេជ្រើសរើសក្រូចមួយផ្លែបានក្រូចជូរ

ខ. រកប្រូបាបដែលក្រូចបាត់ដំបង ដោយដឹងថាក្រូចជូរ

គ. រកប្រូបាបដែលក្រូចកំពង់ចាម ដោយដឹងថាក្រូចផ្អែម

ឃ. បើក្នុងកញ្ចេរនេះមានក្រូច 1000 ផ្លែ តើមានក្រូចជូរចំនួនប៉ុន្មានផ្លែ ? ក្រូចជូរជាក្រូចបាត់ដំបងមានប៉ុន្មានផ្លែ ?

មេរៀនសង្ខេប

- បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ 2 ក្នុងលំហសំណាកមួយដែល $P(A)\neq 0$ នោះប្រូបាប មានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ដោយដឹងថា A គឺ : $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- គេអាចគណនាបានដូចគ្នា $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $(P(B)\neq 0)$
- តាមរូបមន្តនេះ គេអាចទាញបានប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B

  $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=P(B)\times P(A/B)$

  A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ 2 ដែលមានប្រូបាបមិនសូន្យ
- គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B មិនអាស្រ័យគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌណាមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

  1 . $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ឬ

  2 . $P(A/B)=P(A)$ ឬ

  3 . $P(B/A)=P(B)$
- គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B អាស្រ័យគ្នា កាលណា

  $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

រូបមន្តប្រូបាបសរុប : $P(B)=\sum_{i=1}^{n}[P(B/A_i)\times P(A_i)]$

ទ្រឹស្តីបទបៃយេស : $P(A_k/B)=\dfrac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}[P(B/A_i)\times P(A_i)]}$

លំហាត់

1. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 គ្រាប់ខុសគ្នា ។ រកប្រូបាបដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចេញលេខ 1 ដោយដឹងថាគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំង 2 ចេញលេខខុសគ្នា ។

2. ថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 5 និងប៊ូលខ្មៅ 1 ។ គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួន 3 ដង ដោយចៃដន្យចេញពីថង់ដោយមិនដាក់វិញ ។ គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ :

   A : " ប៊ូលយកចេញលើកទី 1 ពណ៌ក្រហម "

   B : " ប៊ូលចាប់លើកទី 2 ពណ៌ក្រហម "

   C : " ប៊ូលចាប់លើកទី 3 ពណ៌ខ្មៅ "

   ក. គណនាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ : $P(A/B)$, $P(C/A\cap B)$, $P(A/C)$

   ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ C អាស្រ័យគ្នា ឬមិនអាស្រ័យគ្នា ?

   គ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B អាស្រ័យគ្នា ឬមិនអាស្រ័យគ្នា ?

3. ថង់មួយមានកាក់ 100 ដែលកាក់ 25 ត្រឹមត្រូវល្អ និងកាក់ 75 គ្មានលំនឹងល្អ ។ ចំពោះកាក់គ្មានលំនឹងល្អនីមួយៗមានប្រូបាបបោះបានខាងលេខស្មើនឹង $\frac{3}{5}$ ។ គេចាប់យកកាក់មួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ រួចបោះ ។

   គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ A : " ចាប់បានកាក់ល្អ " , B : " ចាប់បានកាក់គ្មានលំនឹងល្អ "

   C : " បោះកាក់បានខាងលេខ "

   ក. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ខ. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C

   គ. គណនាប្រូបាបដែលចាប់យកបានកាក់ល្អ ដោយដឹងថាបោះកាក់បានខាងលេខ

4. គ្រូសរសេរសំណួរពីជគណិត និងសំណួរធរណីមាត្រធ្វើជាសន្លឹកឆ្នោតឱ្យសិស្សចាប់ ដើម្បីឆ្លើយយកពិន្ទុដែលប្រូបាបនៃការចាប់បានសំណួរពីជគណិតស្មើនឹងប្រូបាប ដែលចាប់បានសំណួរធរណីមាត្រ ។ គ្រូដឹងថាប្រូបាបដែលសិស្សសុខឆ្លើយត្រូវសំណួរពីជគណិតគឺ 0.7 និងប្រូបាបដែលឆ្លើយសំណួរធរណីមាត្របានត្រឹមត្រូវគឺ 0.5 ។

   ក. រកប្រូបាបដែលសិស្សសុខឆ្លើយត្រូវ

   ខ. គេដឹងហើយថា សុខឆ្លើយសំណួរត្រូវ តើប្រូបាបដែលឆ្លើយត្រូវសំណួរធរណីមាត្រស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ជំពូក

1. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លី 6 : ឃ្លី 3 មានលេខ 1 ឃ្លី 2 មានលេខ 2 និងឃ្លី 1 មានលេខ 3 ។ គេចាប់យកឃ្លី 2 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។

   ក. ចូរកំណត់លំហសំណាក S និងគណនាប្រូបាបនៃលទ្ធផលនីមួយៗក្នុងលំហសំណាក ។

   ខ. គណនាប្រូបាបដែលយកបានឃ្លី 2 មានលេខខុសគ្នា ? យកបានឃ្លីលេខ 1 តែ 1 គត់ ? យកបានឃ្លីលេខ 1 យ៉ាងតិចម្តង ?

   គ. គណនាប្រូបាបដែលឃ្លីយកចេញមានផលបូកលេខស្មើនឹង 4 ។

2. A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ក្នុងលំហសំណាក S ។

   គេស្គាល់ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ : $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.2$

   ក. គណនា $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cup B)$, ($\bar{A}$, $\bar{B}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A និង B)

   ខ. បង្ហាញថា $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ រួចទាញរក $P(A \cap \bar{B})$ និង $P(A \cup \bar{B})$

   គ. គណនា $P(\bar{A} \cap B)$ និង $P(\bar{A} \cup B)$ ។

3. គេរៀបចំឆ្នោត 150 សន្លឹកដើម្បីលក់ឱ្យអស់មុនពេលចេញឆ្នោត ដែលក្នុងនោះមានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់ 7 សន្លឹក ។

   ក. បើអ្នកទិញ បានទិញឆ្នោត 1 សន្លឹក តើប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវរង្វាន់ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

   ខ. បើអ្នកទិញបានទិញឆ្នោត 2 សន្លឹក រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិច 1 សន្លឹក ?

   គ. ឧបមាថាក្នុងឆ្នោត 150 សន្លឹកនេះមានឆ្នោតត្រូវរង្វាន់ $\frac{1}{10}$ ។ បើគេទិញឆ្នោត 15 សន្លឹក តើគេប្រាកដក្នុងចិត្តថា ពិតជាត្រូវរង្វាន់ទាំង $\frac{1}{10}$ នេះ ឬទេ ? រកប្រូបាបដែលអ្នកមានឆ្នោតត្រូវយ៉ាងតិច 3 សន្លឹក ។

4. ក្នុងកម្មវិធីប្រឡងមួយ គ្រូឱ្យសំណួរត្រៀមទៅសិស្ស 100 សំណួរ ។ សិស្សម្នាក់ៗត្រូវចាប់យកសំណួរ 3 ដោយចៃដន្យដើម្បីឆ្លើយ ។ សិស្ស A រៀបចំដោះស្រាយចម្លើយបាន $\frac{1}{4}$ នៃសំណួរទាំងអស់ ។

   រកប្រូបាបដែលសិស្ស A ចាប់បានសំណួរដែលបានត្រៀមចម្លើយរួចស្រេច :

   ក. 3 សំណួរ

   ខ. 2 សំណួរ

   គ. គ្មានបានសំណួរដែលត្រៀមហើយ 1 សោះ

ឃ. យ៉ាងតិច 1 សំណួរ

5. គេចាប់បៀមួយដៃមាន 8 សន្លឹកចេញពីហ៊ូបៀ 52 សន្លឹក ។

រកប្រូបាបដែលបៀក្នុងដៃមាន :

ក. សន្លឹកជួងតែ 2 នាក់

ខ. សន្លឹកការ៉ូ 2 និងសន្លឹកអាត់ 1

គ. សន្លឹកការ៉ូ 3 និងសន្លឹកស្តេចចាស់ 2 សន្លឹក ។

6. គ្រូចង់ដឹងពីចំណង់ចំណូលចិត្តសិស្សក្នុងវិស័យកីឡា ។ ក្នុងចំណោមសិស្ស 30 នាក់មាន 20 នាក់ចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្តីកីឡា 14 នាក់ចូលចិត្តលេងកីឡាផ្ទាល់ និង 8 នាក់ចូលចិត្តទាំង 2 មុខនេះ ។ គ្រូសួរសិស្ស 6 នាក់ដោយចៃដន្យ ។

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

A : " សិស្សទាំង 6 នាក់ចូលចិត្តលេងកីឡា ឬអានទស្សនាវដ្តីកីឡា "

B : " គ្មានសិស្សណាម្នាក់ចូលចិត្តលេងកីឡា "

C : " មានសិស្សម្នាក់គត់ចូលចិត្តលេងកីឡា " ។

7. គេហូតយកបៀ 1 សន្លឹកចេញពីហ៊ូបៀ 32 សន្លឹក ។

គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ :

C : " ហូតបៀបានសន្លឹកកឺ "

R : " ហូតបៀបានសន្លឹកស្តេច "

F : " ហូតបៀបានសន្លឹកក្រមុំ ឬប៊ិច "

ក. តើព្រឹត្តិការណ៍ C និង R អាស្រ័យគ្នាឬទេ ?

ខ. គណនា $P(C/F)$ ។

តើព្រឹត្តិការណ៍ C និង F អាស្រ័យគ្នាឬទេ ?

8. ក្នុងភូមិមួយមានមនុស្ស 15 % កើតជំងឺ M_a ។ ក្នុងចំណោមអ្នកកើតជំងឺ M_a មាន 15 % កើតជំងឺ M_b និងក្នុងចំណោមអ្នកមិនកើតជំងឺ M_a មាន 4 % កើតជំងឺ M_b ។

គេសាកសួរមនុស្សម្នាក់ដោយចៃដន្យ និងគេតាងព្រឹត្តិការណ៍ :

A : " អ្នកកើតជំងឺ M_a "

B : " អ្នកកើតជំងឺ M_b "

ក. គណនា $P(A)$ $P(B/A)$ និង $P(B/\bar{A})$

ខ. គណនា $P(B)$ និង $P(A/B)$ ។

9. រោងចក្រមួយផលិតអំពូលអគ្គិសនីដែលមាន 75 % សមតាមខ្នាត និង 25 % ល្អៀងពីខ្នាត ។ គេធ្វើការជ្រើសរើសរៀបចំអំពូលដែលផលិតរួចដាក់ក្នុងប្រអប់ ។ ដោយការត្រួតពិនិត្យនេះមិនបានល្អិតល្អន់ នោះគេដឹងថាក្នុងចំណោមអំពូលល្អៀងពីខ្នាត គេទទួលយករៀបដាក់ក្នុងប្រអប់ 10 % និងក្នុងចំណោមអំពូលសមតាមខ្នាត គេទទួលយករៀបទុក 90 % ។ រកប្រូបាបដែល :

ក. អំពូលមួយត្រូវទទួលយករៀបទុកក្នុងប្រអប់

ខ. អំពូលមួយសមតាមខ្នាត ដោយដឹងថាជាអំពូលត្រូវទទួលយកទុកក្នុងប្រអប់ ។

គ. បើគេផលិតអំពូល 100 តើគេយកអំពូលរៀបដាក់ក្នុងប្រអប់ចំនួនប៉ុន្មាន ? ហើយក្នុងនោះមានអំពូលល្អសមតាមខ្នាតចំនួនប៉ុន្មាន ?

10. គេមានប្រអប់ 2 ដែលប្រអប់ទី I មានឃ្លីពណ៌ស 2 គ្រាប់ខ្មៅ 3 គ្រាប់និងប្រអប់ទី II មានឃ្លីពណ៌ស 3 គ្រាប់ខ្មៅ 4 គ្រាប់ ។ គេជ្រើសរើសប្រអប់មួយដោយចៃដន្យ រួចចាប់យកឃ្លីមួយដោយចៃដន្យចេញពីប្រអប់នេះ ។

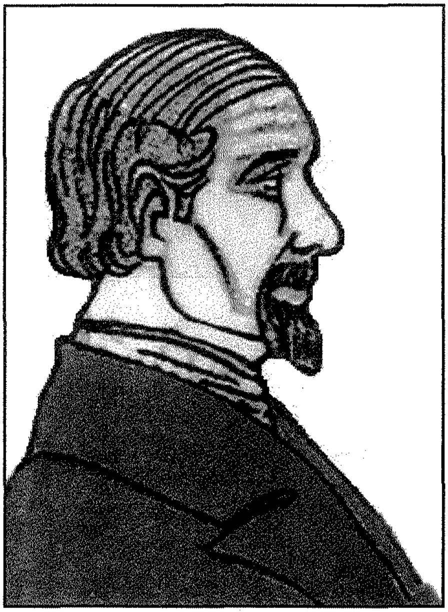
ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ស ។

ខ. រកប្រូបាបនៃឃ្លីយកចេញពីថង់ទី I ដោយដឹងថាជាឃ្លីពណ៌ខ្មៅ ។

ជំពូក 7

ចំនួនកុំផ្លិច

1. ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត
2. ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
3. ស្វ័យគុណទី n និងឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច
4. អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ



នៅអំឡុងឆ្នាំ 1572 អ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិអ៊ីតាលីម្នាក់ឈ្មោះ Rafaelle Bombelli បានបង្ហាញឱ្យឃើញថា សំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ មិនទាន់គ្រប់គ្រាន់សម្រាប់បកស្រាយសមីការពីជគណិតដែលមានទម្រង់ $x^2+a=0$ ដែល $a>0$ នោះទេ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះ គេត្រូវបង្កើតចំនួនមួយទៀតគឺ i ដែល $i^2=-1$ ។

មេរៀនទី 1

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

1. សញ្ញាណនៃចំនួនកុំផ្លិច

វត្ថុបំណង

- ស្គាល់ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត
- គណនាប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច
- តាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់

ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានរាង $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។ i ហៅថាឯកតានិមិត្ត ដែល $i^2=-1$ ។ ផលគុណនៃចំនួនពិតខុសពីសូន្យនិង i ហៅថាចំនួននិមិត្ត ។ ដូចជា $-i$, $7i$, $\frac{2}{3}i$ ជាចំនួននិមិត្ត ។

ទម្រង់ $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ហៅថាទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច ។ a ហៅថាផ្នែកពិត ហើយ b ជាផ្នែកនិមិត្ត ។

ឧទាហរណ៍ បើគេតាង z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $z=-2+3i$ នោះ $a=-2$ និង $b=3$ ។

បើគេតាង z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $z=-3i$ នោះ $a=0$ និង $b=-3$ ។

$4-3i$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $4+3i$ ។

ជាទូទៅ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z តាងដោយ $\bar{z}=a-bi$ ។

$-3-i$ ជាចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃ $3+i$

ជាទូទៅ ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ គេតាងដោយ $-z=-a-ib$ ។

លំហាត់គំរូ រកចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់និងចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិច $1-3i$, $3+4i$, 24 និង $-i$ ។

PROEUS DARA

ចម្លើយ

ចំនួនកុំផ្លិច	ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់	ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ
$1-3i$	$1+3i$	$-1+3i$
$3+4i$	$3-4i$	$-3-4i$
24	24	-24
$-i$	i	i

ប្រតិបត្តិ រកចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់និងចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិច $4+i$, $3-5i$, -12 និង $3i$ ។

2. ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

2.1 វិធីបូកចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 1 $(5+3i)+(-1+2i) = [5+(-1)]+(3+2)i = 4+5i$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 $(2+5i)+(3-2i) = (2+3)+(5-2)i = 5+3i$ ។

ជាទូទៅ ផលបូកនៃចំនួនកុំផ្លិច $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

2.2 វិធីដកចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 1 $(9-2i)-(4-4i) = (9-4)+[-2-(-4)]i = 5+2i$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 $(6+4i)-(3+6i) = (6-3)+(4-6)i = 3-2i$ ។

ជាទូទៅ ផលដកនៃចំនួនកុំផ្លិច $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

2.3 វិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 1 $3i(5-4i) = 15i-12i^2 = 15i-12(-1)$ ដោយ $i^2 = -1$

$= 12+15i$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 $(2+3i)(4+2i) = 2(4+2i)+3i(4+2i) = 8+4i+12i+6i^2$

$= 8+16i+6(-1)$

$= 2+16i$ ។

ជាទូទៅ ផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

2.4 វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 1 គណនា $\frac{3}{2+i}$ រួចសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គេបាន $\frac{3}{2+i} = \frac{3(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i}{4+1} = \frac{6-3i}{5}$

ដូចនេះ $\frac{3}{2+i} = \frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គណនា $\frac{3+2i}{1-3i}$ រួចសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គេបាន $\frac{3+2i}{1-3i} = \frac{(3+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

ដោយប្រើរូបមន្ត $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$$\Rightarrow (1-3i)(1+3i) = 1^1-(3i)^2 = 1-9i^2 = 10$$

ដូចនេះ $\frac{3+2i}{1-3i} = \frac{3+9i+2i+6i^2}{10} = \frac{-3+11i}{10} = -\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$ ។

លំហាត់គំរូ 1 សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z ជាទម្រង់ពីជគណិតដែល $z = \frac{-41+63i}{50}-\frac{6i+1}{1-7i}$ ។

ចម្លើយ $z = \frac{-41+63i}{50}-\frac{6i+1}{1-7i} = \frac{-41+63i}{50}-\frac{(6i+1)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}$

$$= \frac{-41+63i}{50}-\frac{6i+42i^2+1+7i}{50}$$

$$= \frac{-41+63i-13i+41}{50}$$

ដូចនេះ $z = i$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាចំនួន $z = \frac{(2-i)(1+i)}{2i(5+3i)}$ ។

ចម្លើយ $z = \frac{(2-i)(1+i)}{2i(5+3i)} = \frac{2+2i-i-i^2}{10i+6i^2} = \frac{3+i}{-6+10i}$

$$= \frac{(3+i)(-6-10i)}{(-6+10i)(-6-10i)}$$

$$= \frac{-18-30i-6i-10i^2}{36+100}$$

$$= \frac{-8-36i}{136}$$

ដូចនេះ $z = -\frac{1}{17}-\frac{9}{34}i$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ប្រតិបត្តិ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = i$ និង $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។ គណនា $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ។

សំគាល់ ចំនួនកុំផ្លិចពីរ $a + bi$ និង $c + di$ ស្មើគ្នាលុះត្រាតែ $a = c$ និង $b = d$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានសមីការ $3x - \sqrt{-25} = -6 + 3yi$ ។ គណនា x និង y ។

សរសេរផ្នែកខាងឆ្វេងនៃសមីការជាទម្រង់ពីជគណិត គេបាន $3x - 5i = -6 + 3yi$ ចំនួនកុំផ្លិចទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $3x = -6$ និង $-5 = 3y$ ។

ដូចនេះ $x = -2$ និង $y = -\frac{5}{3}$ ។

2.5 លក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

ឧទាហរណ៍ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 - i5$ និង $W = -4 + i$

គេបាន $z + w = -2 - 4i \Rightarrow \overline{z + w} = -2 + 4i$

$z - w = 6 - i6 \Rightarrow \overline{z - w} = 6 + i6$

$\bar{Z} = 2 + i5$; $\bar{W} = -4 - i \Rightarrow \bar{Z} + \bar{W} = -2 + i4 \Rightarrow \bar{Z} - \bar{W} = 6 + i6$

> **ជាទូទៅ** បើ Z និង W ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\overline{Z \pm W} = \bar{Z} \pm \bar{W}$

ឧទាហរណ៍ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = 5 - i$ និង $W = 2 + 3i$

គេបាន $ZW = (5 - i)(2 + 3i) = (10 + 3) + (15 - 2)i = 13 + i13 \Rightarrow \overline{ZW} = 13 - i13$

$\bar{Z}\bar{W} = (5 + i)(2 - i3) = (10 + 3) + (-15 + 2)i = 13 - i13$

> **ជាទូទៅ** បើ Z និង W ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\overline{ZW} = \bar{Z} \times \bar{W}$

ឧទាហរណ៍ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = 1 - i3$ និង $W = 4 - i$

គេបាន $\frac{Z}{W} = \frac{1 - i3}{4 - i} = \frac{(1 - i3)(4 + i)}{16 + 1} = \frac{(4 + 3) + (1 - 12)i}{17} = \frac{7 - i11}{17}$

$\Rightarrow \overline{\left(\frac{Z}{W}\right)} = \frac{7 + i11}{17}$

$\frac{\bar{Z}}{\bar{W}} = \frac{1 + i3}{4 + i} = \frac{(1 + i3)(4 - i)}{17} = \frac{(4 + 3) + (-1 + 12)i}{17} = \frac{7 + i11}{17}$

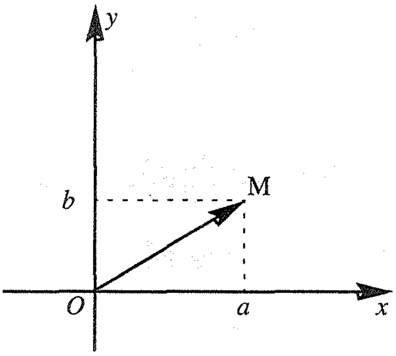
> ជាទូទៅ បើ Z និង W ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\overline{\left(\frac{Z}{W}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{W}}$

PROEUS DARA

3. ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

3.1 ការតាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

គេមានតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) ។ គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ ដោយចំណុច M ដែលមានកូអរដោនេ (a, b) ក្នុងតម្រុយនេះ ។

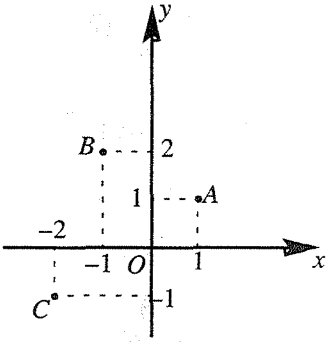


គេថាចំណុច M ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ គេកំណត់សរសេរ $M(z)$ ។ ម្យ៉ាងទៀតចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ អាចតាងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}(a, b)$ គេថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ ហើយកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{OM}(z)$ ។

នៅពេលដែលចំណុចក្នុងតម្រុយតាងចំនួនកុំផ្លិច ប្លង់ដែលប្រដាប់ដោយតម្រុយនេះ ហៅថា ប្លង់កុំផ្លិច ។

អ័ក្ស $(x'ox)$ ហៅថាអ័ក្សនៃផ្នែកពិត ហើយអ័ក្ស $(y'oy)$ ហៅថាអ័ក្សនៃផ្នែកនិមិត្ត ។

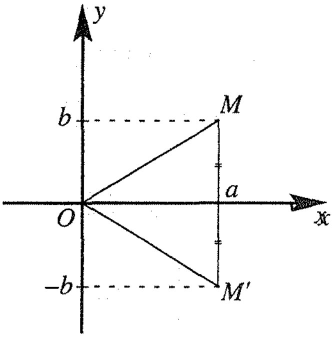
ឧទាហរណ៍ តាងរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $1+i$, $-1+2i$ និង $-2-i$ ដោយចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។



យើងតាងចំណុច A, B និង C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $1+i$, $-1+2i$ និង $-2-i$ រូបខាងស្តាំ ។

- ចំពោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

ឧទាហរណ៍ រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ និង $\bar{z} = a-bi$ ។



តាងចំណុច M និង M' ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z និង $\bar{z}$ រៀងគ្នាដូចរូបខាងស្តាំ ។

សន្និដ្ឋាន ចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នា មានរូបភាពឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សពិត ។

ប្រតិបត្តិ 1 កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $2-3i$, $-4+i$, $0-2i$ និង $1+0i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ប្រតិបត្តិ 2 កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z, $\bar{z}$ និង $-z$ បើគេឱ្យ $z = -2-3i$ ។

4. វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូក ផលដកចំនួនកុំផ្លិចនិងផលគុណចំនួនពិតជាមួយនឹងចំនួនកុំផ្លិច

4.1 វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃ z_1+z_2 ដែល $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

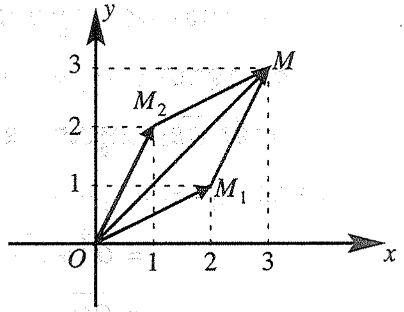
តាងវិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច Z_1

វិចទ័រ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច Z_2 ។

គេបាន $z_1+z_2=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

$=\overrightarrow{OM}$ ជាអង្កត់ទ្រូងនៃ ប្រលេឡូក្រាម

(លក្ខណៈផលបូកនៃវិចទ័រ) ដូចនេះ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃ z_1+z_2 ។



ផលបូក $z_1+z_2=(2+i)+(1+2i)$

$=3+3i$ ។

4.2 វិចទ័ររូបភាពនៃផលដកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃផលដក z_1-z_2 ដែល $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ ។

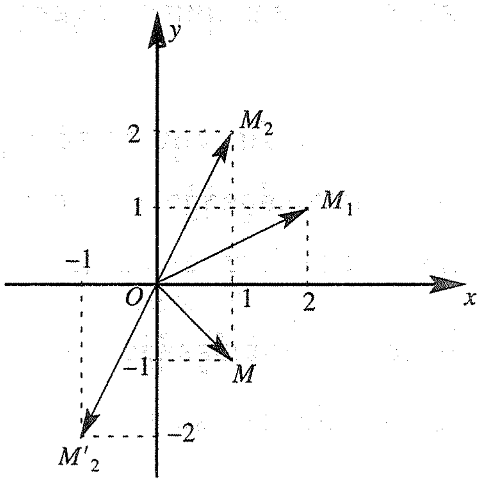
យើងចាត់ទុកថា $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$

តាងវិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1

វិចទ័រ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_2 និង

វិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច

$-z_2=-1-2i$ ។



គេបាន $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'_2}$

$=\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃផលដក

ចំនួនកុំផ្លិច z_1-z_2 ដែលផលដក $z_1-z_2=2+i-(1+2i)=1-i$ ។

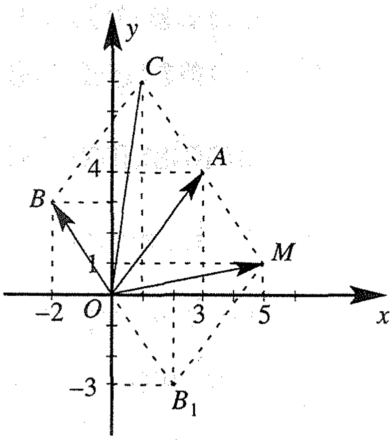
លំហាត់គំរូ កំណត់រូបភាពនៃ z_1+z_2 និង z_1-z_2 បើគេឱ្យ $z_1=3+4i$ និង $z_2=-2+3i$ ។

ចម្លើយ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1

វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_2

គេបាន $z_1 + z_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OC}$ ជាអង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម ។



ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OC}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 + z_2$ ។

យើងចាត់ទុកថា $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ ។

តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB_2}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $-z_2 = 2 - 3i$

គេបាន $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

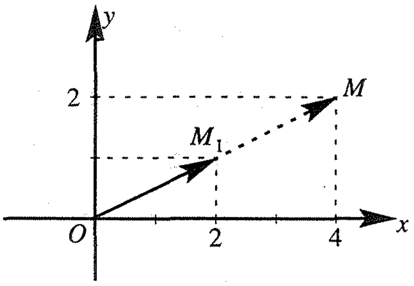
$= \overrightarrow{OM}$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃផលដកចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2$ ។

ប្រតិបត្តិ កំណត់រូបភាពនៃ $z_1 + z_2$ និង $z_1 - z_2$ បើគេឱ្យ $z_1 = 2 + 4i$ និង $z_2 = 1 - 2i$ ។

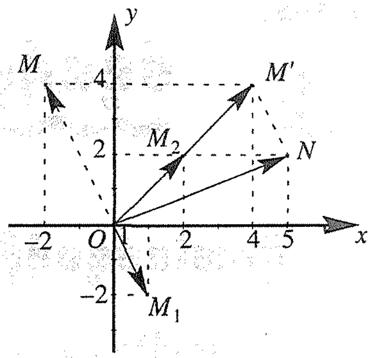
4.3 វ៉ិចទ័ររូបភាពនៃផលគុណចំនួនពិតនឹងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $2z$ បើ $z = 2 + i$ ។



តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ហើយ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $2z$ ។ គេបាន $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃ $2z$ ដែល $2z = 2 \times (2 + i) = 4 + 2i$

លំហាត់គំរូ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 - 2i$ និង $z_2 = 2 + 2i$ ។ កំណត់រូបភាពនៃ $-2z_1$ និង $2z_2 + z_1$ ។



ចម្លើយ រូបភាពនៃ $-2z_1$

តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1-2i$ ហើយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃ $-2z_1$ ។ គេបាន $\overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{OM_1}$ ដែលជារូបភាពនៃ $-2z_1$ ។ ដែល

$-2z_1 = -2(1-2i) = -2+4i$ ។

រូបភាពនៃ $2z_2+z_1$

តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃ $z_2 = 2+2i$ ហើយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM'}$ ជារូបភាពនៃ $2z_2$ ។ គេបាន $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃ $2z_2$ ។

$2z_2+z_1 = \overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{ON}$ ជាអង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម $OM'NM_1$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $2z_2+z_1 = 2(2+2i)+1-2i = 5+2i$ ។

ប្រតិបត្តិ កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $-\frac{1}{2}z$ បើគេឱ្យ $z = 2+4i$ ។

លំហាត់

1. គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 , z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ បើ

   ក. $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 1-7i$ ខ. $z_1 = \sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}i$ ។

2. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $a+bi$

   ក. $\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(2i+1)^2}{2+i}$ ខ. $\frac{(i\sqrt{2}-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1-i}$ គ. $\frac{1+i}{\sqrt{2}-1}\div\frac{1-i}{\sqrt{2}+1}$

3. គណនា $(1+2i)^3$ និង $(3i-4)^4$ ។

4. គេឱ្យ x ជាចំនួនពិត ។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $\frac{3+i}{1+i}+\frac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត ។

5. កំណត់រូបភាព តាងចំណុចនៃចំនួនកុំផ្លិច $-1-3i$, $-1+3i$, 2 , $4i$ និង $2-3i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

6. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+2i$ និង $z_2 = 2+4i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។ កំណត់រូបភាពនៃ

   ក. z_1+z_2 ខ. z_1-z_2 គ. $2z_2$ ឃ. z_2+2z_1 ។

7. កំណត់រូបភាពនៃ z_1+z_2 , z_1-z_2 , $-2z_1$ បើ $z_1 = 2+i$ និង $z_2 = -2+i$

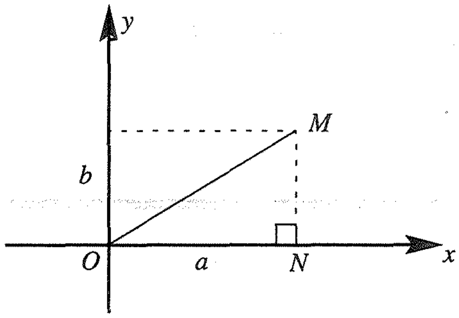
មេរៀនទី 2

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

1. ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ និងចំណុច M ជារូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។ OM ជាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច យើងនឹងគណនាម៉ូឌុលនេះ ។

តាមរូបភាពខាងក្រោម យើងឃើញថាត្រីកោណ OMN កែងត្រង់ N ។



ចំណុចបំណង

- គណនាម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច
- ស្គាល់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច
- គណនាផលគុណនិងផលចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
- កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z តាមបំលែងវិល

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន

$$OM^2 = ON^2 + NM^2$$

$$= a^2 + b^2$$

ដូចនេះ $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

គេតាងម៉ូឌុលនៃ z ដោយ $|z|$ ហើយគេកំណត់សរសេរ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

ឧទាហរណ៍ បើចំនួនកុំផ្លិច $z = 4 - 3i$ គេបាន $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ ។

សំគាល់ $|a + bi|$ ជាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $a + bi$ ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 - 2i$ និង $z_2 = -4i$ គណនា $|z_1|$ និង $|z_2|$ ។

ចម្លើយ $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$|z_2| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $2+i2\sqrt{3}$ និង $-1-i$ ។

លក្ខណៈម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 3-4i$ គណនា $|z|$, $|\bar{z}|$ និង $|-z|$ ។

$z = 3-4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\bar{z} = 3+4i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$-z = -3+4i \Rightarrow |-z| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5$ ។

> **សន្និដ្ឋាន** បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះ $|z| = |\bar{z}|$

ឧទាហរណ៍ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 2-i$ គណនា $|z|^2$ និង $z\cdot\bar{z}$ ។

$z = 2-i$ គេបាន $\bar{z} = 2+i$

$z = 2-i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$|z|^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

$z\cdot\bar{z} = (2-i)(2+i) = 4+1 = 5$

> **សន្និដ្ឋាន** បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះ $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

ឧទាហរណ៍ 3 គណនា $|z_1|\cdot|z_2|$ និង $|z_1\cdot z_2|$ បើ $z_1 = 1-i$ និង $z_2 = 2+i$ ។

$z_1 = 1-i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$z_2 = 2+i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ គេបាន $|z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{2}\times\sqrt{5} = \sqrt{10}$

$z_1\cdot z_2 = (1-i)(2+i)$

$= 2+i-2i-i^2$ ដោយ $i^2 = -1$

$= 3-i$

$|z_1\cdot z_2| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$ ។

> **សន្និដ្ឋាន** បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះ $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

ឧទាហរណ៍ 4 គណនា $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ និង $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ បើគេឱ្យ $z_1 = 3+i$ និង $z_2 = 1-i$ ។

$z_1 = 3+i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3^2+1^1} = \sqrt{10}$

$z_2 = 1-i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

គេបាន $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+i+i^2}{1+1} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$

គេបាន $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

សន្និដ្ឋាន បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច គេបាន $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$

ឧទាហរណ៍ 5 គណនា $|z_1|+|z_2|$ និង $|z_1+z_2|$ បើគេដឹងថា $z_1 = 3-4i$ និង $z_2 = -1-i\sqrt{3}$ ។

$z_1 = 3-4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$z_2 = -1+-i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

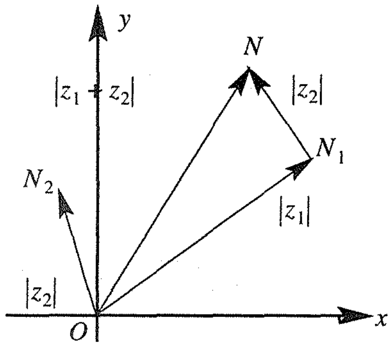
គេបាន $|z_1|+|z_2| = 5+2 = 7$

$z_1+z_2 = 3-4i+(-1-i\sqrt{3}) = 2+(-4-\sqrt{3})i$

$|z_1+z_2| = \sqrt{4+(-4-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+16+8\sqrt{3}+3} = \sqrt{23+8\sqrt{3}} < 7$

សន្និដ្ឋាន បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះ គេបាន $\|z_1+z_2\| \le \|z_1\|+\|z_2\|$

ម្យ៉ាងទៀត គេអាចបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រ : គេមានចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា N_1 និង N_2 ។ N ជាចំណុចដែលកំណត់ដោយ $\overrightarrow{N_1N} = \overrightarrow{ON_2}$ (រូបខាងស្តាំ)



$ON_1 = |z_1|$ និង $N_1N = ON_2 = |z_2|$ ។

N ជារូបភាពនៃ z_1+z_2 ហើយ $ON = |z_1+z_2|$

តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណ ON_1N គេបាន $ON \le ON_1 + N_1N$

ដូចនេះ $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_1|$ ។

លំហាត់គំរូ 1 បង្ហាញថា $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ និង $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ បើគេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = -1 + i\sqrt{3}$ ។

ចម្លើយ $z = -1 + i\sqrt{3}$ គេបាន $\bar{z} = -1 - i\sqrt{3}$ និង $-z = 1 - i\sqrt{3}$

$$= -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\bar{z} = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$-z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |-z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

ដូចនេះ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ ។

$|z|^2 = 2^2 = 4$ ហើយ $z \cdot \bar{z} = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = (-1)^2 - (i\sqrt{3})^2 = 4$

ដូចនេះ $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + 2i$ និង $z_2 = 1 + i$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា :

ក. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ខ. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ គ. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ។

ចម្លើយ ក. $z_1 = -1 + 2i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$z_2 = 1 + i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

គេបាន $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10}$ (1)

$$z_1 z_2 = (-1 + 2i)(1 + i) = -1 - i + 2i + 2i^2$$

$$= -3 + i$$

$|z_1 z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ (2)

ដូចនេះ តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) $\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ។

ខ. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-1 + i + 2i - 2i^2}{1+1} = \dfrac{1+3i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ ។

គេបាន $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (1)

$\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (2)

ដូចនេះ តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) $\Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ ។

គ. $z_1 + z_2 = -1 + 2i + (1+i) = 3i$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{0^2 + 3^3} = 3 \qquad (1)$

$|z_1| + |z_2| = \sqrt{5} + \sqrt{2} > 3 \qquad (2)$

ដូចនេះ តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) $\Rightarrow |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 - i$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ ។

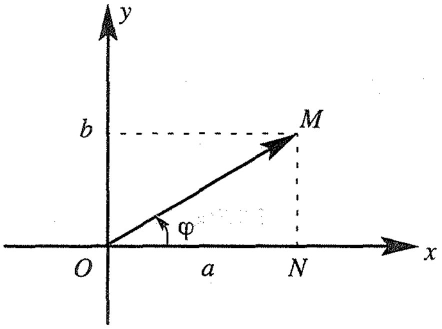
ប្រតិបត្តិ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 + i$ និង $z_2 = -1 - i$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា :

ក. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ខ. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

គ. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ។

2. អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច



គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃ z ។ មុំដែលកំណត់ដោយ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ ហៅថា អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ។ យើងតាង φ ឬ $\arg z$ ជា អាគុយម៉ង់នៃ z នេះ ។

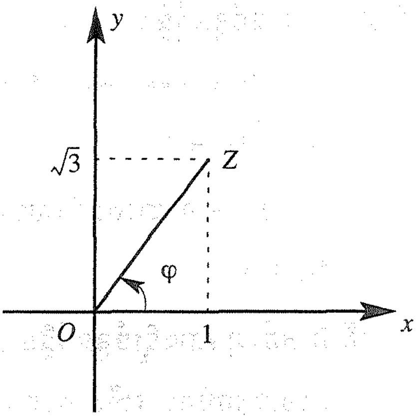
$\arg z = \varphi + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$

N ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M លើអ័ក្សពិត (ox) ក្នុងត្រីកោណកែង OMN កែងត្រង់ N គេបាន :

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ ហើយ $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ ដែល $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ជាម៉ូឌុលនៃ z ។

ដូចនេះ ដើម្បីរកអាគុយម៉ង់នៃ z យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases} \quad \text{ដែល } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ។}$$



ឧទាហរណ៍ 1 រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

$z = 1 + i\sqrt{3}$ ។

$z = 1 + i\sqrt{3}$ ដែល $a = 1$ និង $b = \sqrt{3}$

គេបាន $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

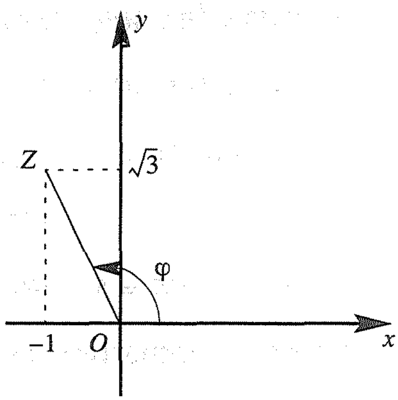
$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ ហើយ $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ហេតុនេះអាគុយម៉ង់ $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

$z = -1 + i\sqrt{3}$ ។

$z = -1 + i\sqrt{3}$ ដែល $a = -1$ និង $b = \sqrt{3}$ គេបាន $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$



$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}$ ហើយ $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ យើងឃើញថាក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ $\cos\varphi = -\frac{1}{2} < 0$ និង $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ ត្រូវស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី 2 ។

ហេតុនេះ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos a - i\sin a$ គណនាអាគុយម៉ង់នៃ z ។

ចម្លើយ $z = \cos a - i\sin a$ មាន

$r = \sqrt{(\cos a)^2 + (-\sin a)^2} = 1$ ។

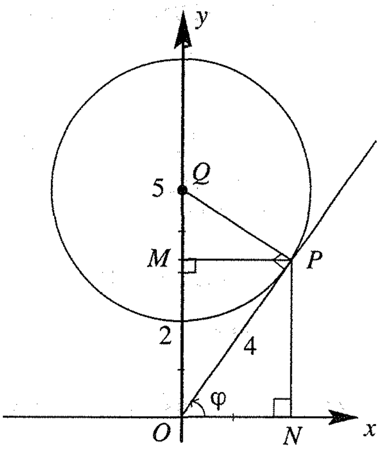
$\cos\varphi = \cos a$ និង $\sin\varphi = -\sin a$

ព្រោះ $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ និង $\sin\alpha = \sin(-a)$

ដូចនេះ $\varphi = -a + 2k\pi$, $k \in Z$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $|z - 5i| = 3$ ។ រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានអាគុយម៉ង់វិជ្ជមានតូចបំផុត ។

ចម្លើយ តាងចំនួនកុំផ្លិច $z = x + yi$



គេបាន $|x + yi - 5i| = 3 \Leftrightarrow |x + (y-5)i| = 3$

$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 3$

$x^2 + (y-5)^2 = 9$ ជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(0, 5)$ និងកាំស្មើនឹង 3 ។

ដើម្បីរកចំណុចតាងឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានអាគុយម៉ង់វិជ្ជមានតូចបំផុត យើងត្រូវគូសបន្ទាត់ប៉ះ OP ទៅនឹងរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(0, 5)$ និងកាំស្មើនឹង 3 ។

តាង Q ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ ។ តាមចំណុចប៉ះ P គូសចំណោលកែងលើអ័ក្ស (ox) ត្រង់ N និងលើអ័ក្ស (oy) ត្រង់ M (រូបខាងលើ) ។

ក្នុងត្រីកោណកែង MPQ កែងត្រង់ M គេបាន $MP^2 = 9 - QM^2$ (1)

ក្នុងត្រីកោណកែង MPO កែងត្រង់ M គេបាន $MP^2 = 16 - MO^2$ (2)

តាម (1) និង (2) : $9 - QM^2 = 16 - MO^2$

$MO^2 - QM^2 = 7$ (3)

ដោយ $QM + MO = 5 \Rightarrow MO = 5 - QM$

សមីការ (3) អាចសរសេរ $(5 - QM)^2 - QM^2 = 7$

$25 - 10QM + QM^2 - QM^2 = 7$

$10QM = 18 \Rightarrow QM = \frac{9}{5}$

$MP^2 = 9 - QM^2 = 9 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = 9 - \frac{81}{25} = \frac{144}{25} \Rightarrow MP = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$ ។

$ON = MP = \frac{12}{5}$ ហើយ $OM = OQ - QM = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$ ។

ដូចនេះ ចំណុច $P\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{12}{5} + i\frac{16}{5}$ ដែលជាចំនួនកុំផ្លិចមានអាគុយម៉ង់វិជ្ជមានតូចបំផុត ។

ប្រតិបត្តិ គណនាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $-i$ និង $-1 + i$ ។

3. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

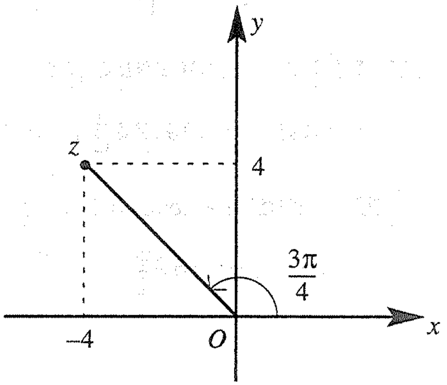
ចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ ជាទម្រង់ពីជគណិត យើងអាចសរសេរ z ទៅជាទម្រង់មួយផ្សេងទៀត ។ ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\varphi$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\varphi$ បើយើងជំនួសតម្លៃ $a = r\cos\varphi$ និង $b = r\sin\varphi$ ក្នុងចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ គេបាន ៖

$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z ។

ជាទូទៅ ចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ អាចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ឧទាហរណ៍ 1 បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិច $-4+4i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។



តាង $z = -4+4i$ ដែល $a = -4$ និង $b = 4$

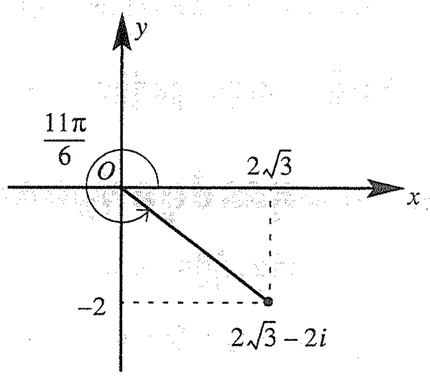
គេបាន $r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ ដោយ

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ។

ដូចនេះ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិច $2\sqrt{3}-2i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។



$2\sqrt{3}-2i$ មាន $a = 2\sqrt{3}$ និង $b = -2$

គេបាន $r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ហើយ

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

ហេតុនេះ $\varphi = \frac{11\pi}{6}$ ។

ដូចនេះ $2\sqrt{3}-2i = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2\cos\frac{7\pi}{4}-2i\sin\frac{\pi}{4}$ និង $z_2 = -\cos\frac{\pi}{17}+i\sin\frac{\pi}{17}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ ដោយ $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ និង $-\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

គេបាន $z_1 = 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដូចគ្នានេះដែរ $-\cos\frac{\pi}{17} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{17}\right) = \cos\frac{16\pi}{17}$ និង $\sin\frac{\pi}{17} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{17}\right) = \sin\frac{16\pi}{17}$

ដូចនេះ $z_2 = \cos\frac{16\pi}{17}+i\sin\frac{16\pi}{17}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 1+\cos\varphi-i\sin\varphi$ ដែល $-\pi+2k\pi<\varphi<\pi+2k\pi$, $k\in Z$ ។ សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ ដោយ $1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ ហើយ $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

គេបាន $z = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}-i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

ដោយ $-\pi+2k\pi<\varphi<\pi+2k\pi$ នោះ $\frac{-\pi}{2}+k\pi<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Rightarrow$ $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, $2\cos\frac{\varphi}{2}$ ជាម៉ូឌុលនៃ z

ដូចនេះ $z = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right]$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ប្រតិបត្តិ បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -2$ និង $z_2 = 2\sqrt{3}-2i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

4. ផលគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ ។

គេបាន $z_1z_2 = [r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)]$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\phi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1)$$

$$= r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)]$$

តែ $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1+\varphi_2)$

$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1+\varphi_2)$

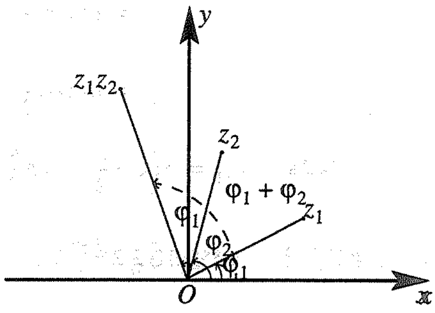
ដូចនេះ $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

ជាទូទៅ បើ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

នោះគេបាន $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

ន័យធរណីមាត្រនៃផលគុណចំនួនកុំផ្លិច

- $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$
- $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ ។



ឧទាហរណ៍ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិច

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ និង $z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

គណនា z_1z_2 ។

គេបាន $z_1z_2 = \sqrt{2}\times 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{12} + i\sin\frac{25\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $z_1z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{12} + i\sin\frac{25\pi}{12}\right)$

ឧទាហរណ៍ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$ និង $z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

គណនា z_1z_2 ។

គេបាន $z_1z_2 = \sqrt{2}\times\sqrt{8}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

$$= 4\left(\cos\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8}\right)$$

ដូចនេះ $z_1z_2 = 4\left(\cos\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8}\right)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ និង $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ ។ ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 គណនាផលគុណ $z_1 z_2$ ។

ចម្លើយ $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ ដែល $a = 2\sqrt{3}$ និង $b = -2$ គេបាន $r = \sqrt{12+4} = 4$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ឬ $\varphi = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ ។

$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ ដែល $a = -1$ និង $b = \sqrt{3}$ គេបាន $r = \sqrt{1+3} = 2$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ។

$$\Rightarrow z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \text{ ។}$$

$$z_1 z_2 = 4 \times 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \text{ ។}$$

$$= 8\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ $z_1 z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ គណនា $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

ចម្លើយ $z_1 = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

$z_2 = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ។

គេបាន $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} + i\left(2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}\right)$$

ម្យ៉ាងទៀត $z_1z_2 = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

$= 1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}$

$= 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}) \qquad (2)$

ប្រៀបធៀប (1) និង (2) គេអាចទាញបាន

$$2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} = 1-\sqrt{3} \Rightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12} = 1+\sqrt{3} \Rightarrow \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+i$ និង $z_2 = -1+i\sqrt{3}$ ។ ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 គណនា z_1z_2 ។

ប្រតិបត្តិ 2 គេមាន $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។ គណនា z_1z_2 រួចសរសេរជាទម្រង់ $a+bi$ ។

5. ផលចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

សង្កេតចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច z បើ $z = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$= (r\cos\varphi)+i(r\sin\varphi)$

គេបាន $\bar{z} = (r\cos\varphi)-i(r\sin\varphi) = r\cos(-\varphi)+i[r\sin(-\varphi)]$

ដូចនេះ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ គឺ $\bar{z} = r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$ ។

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ ។

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\times\frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}} = \frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}\times\frac{r_2[\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2)]}{r_2[\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2)]}$

$$= \frac{r_1r_2[\cos\varphi_1\cos(-\varphi_2)+i\cos\varphi_1\sin(-\varphi_2)+i\sin\varphi_1\cos(-\varphi_2)+i^2\sin\varphi_1\sin(-\varphi_2)]}{r_2r_2[\cos\varphi_2\cos(-\varphi_2)+i\cos\varphi_2\sin(-\varphi_2)+i\sin\varphi_2\cos(-\varphi_2)+i^2\sin\varphi_2\sin(-\varphi_2)]}$$

$$= \frac{r_1[\cos\varphi_1\cos(-\varphi_2)-\sin\varphi_1\sin(-\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin(-\varphi_2)+\sin\varphi_1\cos(-\varphi_2))]}{r_2[\cos\varphi_2\cos(-\varphi_2)-\sin\varphi_2\sin(-\varphi_2)+i(\cos\varphi_2\sin(-\varphi_2)+\sin\varphi_2\cos(-\varphi_2))]}$$

$$= \frac{r_1[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]}{r_2(\cos 0+i\sin 0)}$$

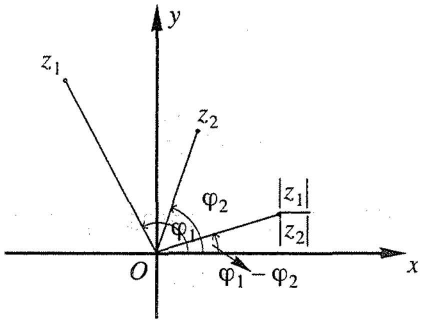
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ ។

ជាទូទៅ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ដែល $z_2 \neq 0$ នោះគេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ ។

ន័យធរណីមាត្រនៃផលចែកចំនួនកុំផ្លិច

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ ។



ឧទាហរណ៍ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិច

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ និង $z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ ។

គេបាន $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 សរសេរចំនួន $z = \frac{-1+i}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

តាង $z_1 = -1 + i$ និង $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ។

ចំនួន $z_1 = -1 + i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ គេបាន $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ។

គេបាន $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $z = \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 សរសេរចំនួន $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2i\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{i}$

តែ $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ និង $1 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$ ។

គេបាន $z = \frac{\cos 2\pi + i\sin 2\pi}{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}$

$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

ដូចនេះ $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 + i$ គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

ចម្លើយ $z_1 = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ។

គេបាន $z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

$z_2 = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$= \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$= \frac{-1+i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}}{1+1}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (2)$$

ប្រៀបធៀប (1) និង (2) យើងអាចទាញបាន

$$\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គេមានចំនួន $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

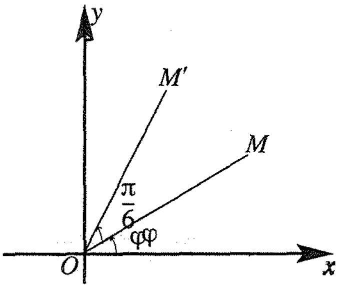
គណនាផលចែក $\frac{z_1}{z_2}$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = i$ និង $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ ។ ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 គណនាផលចែក $\frac{z_1}{z_2}$ ។

6. បំលែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយនៃប្លង់កុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ មានរូបភាពកំណត់ដោយចំណុច M ។ គេឱ្យចំណុច M ផ្លាស់ទីទៅកាន់ចំណុច M' ដែលជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z' = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z$ ។

កំណត់ទីតាំងនៃចំណុច M'



$$z' = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ ចំណុច M' ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច

$z' = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$ ដែល $(\vec{ox}, \vec{oM}) = \varphi$ ហើយ $(\vec{ox}, \vec{oM'}) = \varphi + \frac{\pi}{6}$ ។

គេថាចំណុច M' ជារូបភាពនៃ M តាមបម្លាស់ទីដោយវិលជុំវិញគល់ O តាមមុំ $\frac{\pi}{6}$ ។

បម្លាស់ទីបែបនេះហៅថា បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\frac{\pi}{6}$ ។

ជាទូទៅ មានចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$

បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត O

(O ជាគល់តម្រុយ) និងមុំ α នោះ $z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ ។

លំហាត់គំរូ 1 នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច xOy ចំណុច M ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 1+i$ និង M' ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z' ។ កំណត់ z' ដើម្បីឱ្យ M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\frac{\pi}{3}$ ។

ចម្លើយ ចំណុច M' ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z' = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z$

តែ $z = 1+i$ មាន $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ។

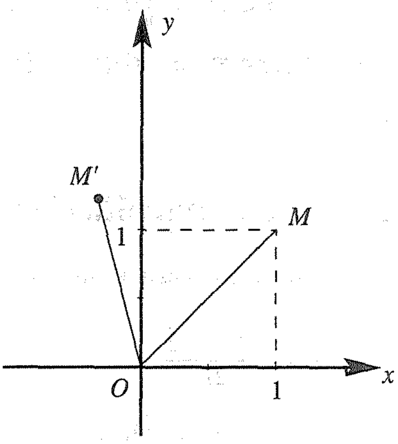
គេបាន $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z' = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $z' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ។



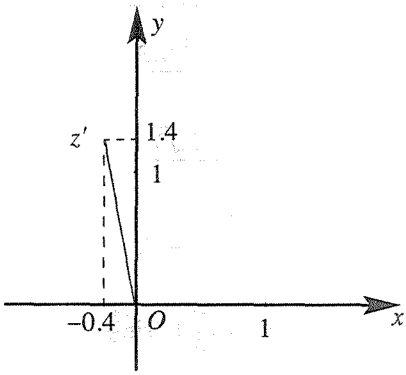
ម្យ៉ាងទៀត យើងអាចកំណត់ z'

ដោយ $z' = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

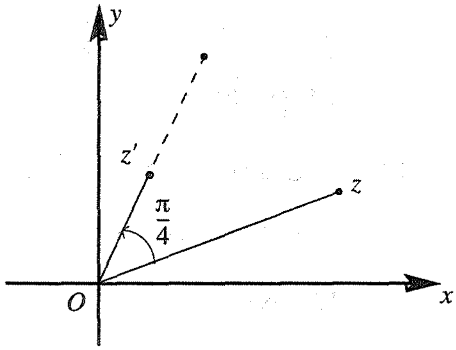
$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ ។



លំហាត់គំរូ 2 នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ចំណុច M ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ហើយ M' ជារូបភាពនៃ $z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(z+iz)$ ដោយដឹងថា M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិលផ្ចិត O ។ ចូរកំណត់មុំនៃបំលែងវិល ។

ចម្លើយ $z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(z+iz) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)z$$

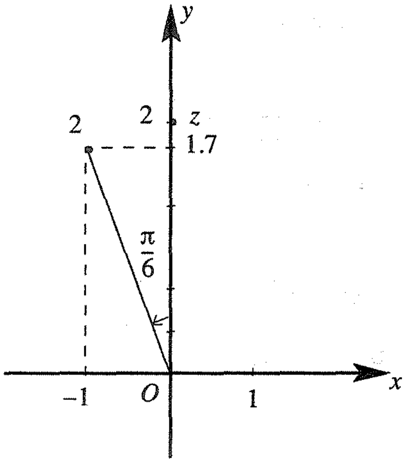


នេះបញ្ជាក់ថា M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិលមុំ $\frac{\pi}{4}$ ហើយ $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ មានម៉ូឌុលស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ នៃម៉ូឌុល z ។

លំហាត់គំរូ 3 M' ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z' = -1+i\sqrt{3}$ និង M ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 2i$ ។ ដោយដឹងថា M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិលផ្ចិត O ចូរកំណត់មុំនៃការបំលែងវិលនោះ ។

ចម្លើយ តាង φ ជាមុំនៃបំលែងវិល គេបាន

$$z' = (\cos\varphi + i\sin\varphi)z \Rightarrow \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{z'}{z}$$



តែ $\frac{z'}{z} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}$

$$= \frac{(-1+i\sqrt{3})(-2i)}{(2i)(-2i)}$$

$$= \frac{2i-i^2 2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2i+2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \text{ ។}$$

$$= \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ $\cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ ។

គេអាចគណនា φ មុំនៃការវិលតាមវិធីមួយទៀត

$z' = -1 + i\sqrt{3}$ ដែល $a = -1$ និង $b = \sqrt{3}$ មានម៉ូឌុល $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

ដោយ $\cos\alpha = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}$ និង $\sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ហេតុនេះ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ។

$$\Rightarrow Z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$ ។

$z = 2i$ ដែល $a = 0$ និង $b = 2$ មានម៉ូឌុល $r = \sqrt{O^2 + 2^2} = 2$

ដោយ $\cos\beta = \frac{a}{r} = 0$ និង $\sin\beta = \frac{b}{r} = \frac{2}{2} = 1$ ហេតុនេះ $\beta = \frac{\pi}{2}$ ។

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$ ។

គេបាន $$\frac{z'}{z} = \frac{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$\cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ ដូចនេះ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 ចូរកំណត់ z' ដោយដឹងថា $M'(z)$ ជារូបភាពនៃ $M(z = 4 - 2i)$ តាមបំលែងវិល ផ្ចិត O មុំ $-\frac{7\pi}{6}$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 ចូរកំណត់ z ដោយដឹងថាតាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\frac{-\pi}{4}$

ចំណុច $M(z)$ មានរូបភាព $M'(z' = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ ។

លំហាត់

1. គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

ក. $|-2i|$ ខ. $|\sqrt{3}+1|$ គ. $|4+3i|+|4-3i|$

ឃ. $|(4+3i)+(4-3i)|$ ង. $|i^7|$ ច. $|i^{100}|$ ។

2. បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច ។ ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម :

ក. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$ ខ. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ គ. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

3. គណនាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម :

ក. $2+2i$ ខ. $-3+3i$ គ. $-2+i2\sqrt{3}$ ឃ. $-1-i$

ង. $4i$ ច. -4 ឆ. $-\sqrt{3}+i$ ។

4. គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម :

ក. $z_1 = 1+i$ ខ. $z_2 = -1+i\sqrt{3}$ គ. $z_1 z_2$ ឃ. z_1^2 ង. $\frac{z_1}{z_2}$ ។

5. តើចំនួនខាងក្រោម មួយណាមានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ ខ. $-5\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

គ. $-2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ ឃ. $6\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

ង. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ច. $-\sqrt{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

6. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $-5-i5\sqrt{3}$ ខ. $\frac{-5+i}{2-3i}$ គ. $2+2i$ ឃ. $-i$

ង. $-20i$ ច. 15 ឆ. $2\sqrt{3}+2i$ ជ. $-6i$ ។

7. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z = \dfrac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

8. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z ជាទម្រង់ពីជគណិតបើគេឱ្យ

ក. $|z| = 2$ និង $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ខ. $|z| = 4$ និង $\arg z = \frac{3\pi}{4}$

គ. $|z| = 1$ និង $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ ឃ. $|z| = 6$ និង $\arg z = \frac{7\pi}{6}$

9. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \tan\alpha + i$ ដែល $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ និង $w = 4\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$ គណនា

ក. $|z|$

ខ. $|zw|$

គ. $\arg z$

ឃ. $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ ។

10. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z = \dfrac{1 + \sin\alpha + i\cos\alpha}{1 + \sin\alpha - i\cos\alpha}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

11. គេមានចំនួនកុំផ្លិច z និង w ដែល $z = -2 + 5i$, $zw = 14 + 23i$ ។

ក. គណនា w

ខ. កំណត់រូបភាពនៃ z និង w ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតែមួយ ។

12. ប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 គណនា $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ បើ ៖

ក. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ និង $z_2 = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

ខ. $z_1 = -5 + 5i$ និង $z_2 = -3i$

គ. $z_1 = 2i$ និង $z_2 = -3i$ ។

13. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) តាមចំណុច $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z = -4 + 4i)$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\frac{\pi}{6}$ ។ ចូរកំណត់ z' ។

14. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ចំណុច $M(z)$ មានរូបភាព $M'(z')$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ θ ។ ចូរកំណត់ θ ដោយដឹងថា z' កំណត់ដោយចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម :

ក. $-\frac{iz}{3}$

ខ. $\frac{3\sqrt{3}}{4}z - \frac{3}{4}zi$

គ. $\frac{1}{2}zi$ ។

មេរៀនទី 3

ស្វ័យគុណទី n និងឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

1. ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ចំណុចបំណង

- គណនាស្វ័យគុណទី n និងឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច
- អនុវត្តក្នុងត្រីកោណមាត្រ

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

ដោយអនុវត្តន៍តាមរូបមន្ត

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

គេបាន $zz = rr[\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)]$

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2 \times z = (r^2\times r)[\cos(2\varphi+\varphi) + i\sin(2\varphi+\varphi)] = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

$$z^4 = z^3 \times z = (r^3\times r)[\cos(3\varphi+\varphi) + i\sin(3\varphi+\varphi)] = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

$$z^5 = z^4 \times z = (r^4\times r)[\cos(4\varphi+\varphi) + i\sin(4\varphi+\varphi)] = r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)$$

....

....

$z^n = z^{n-1}\times z = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ។

ជាទូទៅ បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ នោះ $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

គ្រប់ n ជាចំនួនគត់រ៉ឡាទីបវិជ្ជមាន ។ គេអាចទាញបាន :

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ ហៅថា រូបមន្ត ដឺម័រ ។

ឧទាហរណ៍ 1 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ គណនា z^3 ។

$$z^3 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = 2^3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 3\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\times 3\right)\right]$$

$$= 8(\cos\pi + i\sin\pi)$$

ដូចនេះ $z^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គណនា $(-1+i)^{10}$ ។

តាង $z = -1+i$ ដែល $a = -1$ និង $b = 1$ គេបាន $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ។

គេបានចំនួនកុំផ្លិច z ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

តាមរូបមន្ត

$$(-1+i)^{10} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{10}$$

$$= 2^5\left[\cos\left(10\times\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(10\times\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^5\left(\cos\frac{15\pi}{2}+i\sin\frac{15\pi}{2}\right)$$

$$= 2^5\left[\cos\left(6\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2^5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -2^5 i$$

ដូចនេះ $(-1+i)^{10} = -32i$ ។

លំហាត់គំរូ 1 សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $(-\sqrt{3}+i)^{13}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត $a+bi$ ។

ចម្លើយ ដំបូងត្រូវបំប្លែងចំនួនខាងលើ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គេមាន $-\sqrt{3}+i$ ដែល $a = -\sqrt{3}$ និង $b = 1$ គេបាន $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-3)^2+1^2} = 2$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ ។

គេបាន $-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ។

តាមរូបមន្តដឺម័រ

$$(-\sqrt{3}+i)^{13} = 2^{13}\left[\cos\left(13\times\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(13\times\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2^{13}\left(\cos\frac{65\pi}{6}+i\sin\frac{65\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{13}\left[\cos\left(10\pi+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(10\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2^{13}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$(-\sqrt{3}+i)^{13} = 2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

$$= -2^{12}\sqrt{3}+i2^{12}$$

ដូចនេះ $(-\sqrt{3}+i)^{13} = -2^{12}\sqrt{3}+i2^{12}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនា $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$ ដែល n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

ចម្លើយ គេបាន $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = i$

សរសេរចំនួនកុំផ្លិច i ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

i មាន $a = 0$ និង $b = 1$ គេបាន $r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = 0$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = 1$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ។

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ។

$$z = (i)^{2n} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

$$= \cos\left(2n\times\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2n\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos(n\pi) + i\sin(n\pi)$$

$$= (\cos\pi + i\sin\pi)^n$$

ដូចនេះ $z = (-1)^n$ ។ បើ n គូ , $z = 1$ ហើយបើ n សេស $z = -1$

លំហាត់គំរូ 3 ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម :

$$\left(\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n = \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right] + i\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$$

ចម្លើយ

$$\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi} = \frac{(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)}{(1+\sin\varphi-i\cos\varphi)(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)}$$

$$= \frac{(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)^2}{(1+\sin\varphi)^2-(i\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{1+\sin^2\varphi-\cos^2\varphi+2\sin\varphi+2i\cos\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi}{1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}$$

ដោយ $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$

$$= \frac{2\sin^2\varphi+2\sin\varphi+2i\cos\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}$$

$$= \frac{2\sin\varphi(1+\sin\varphi)+2i\cos\varphi(1+\sin\varphi)}{2(1+\sin\varphi)}$$

$$= \frac{(1+\sin\varphi)(2\sin\varphi+2i\cos\varphi)}{2(1+\sin\varphi)}$$

$$= \sin\varphi + i\cos\varphi$$

ដោយ $\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ និង $\cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

គេបាន $\dfrac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$

$$\Rightarrow\left(\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]^n$$

$$= \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$$

ដូចនេះ $\left(\dfrac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n = \cos\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គណនា $(1+i)^{60}$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 សរសេរ z ជាទម្រង់ $a+bi$ បើគេឱ្យ $z=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)^{13}$ ។

2. អនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណមាត្រ

គេអាចគណនា $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$ តាមរបៀបពីរយ៉ាង

- តាមស្វ័យគុណនៃផលបូកទ្វេធាតុ
- តាមស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ គណនា $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$ ។

- ករណី $n=2$

តាមស្វ័យគុណនៃផលបូកទ្វេធាតុ

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi+2i\cos\varphi\sin\varphi+i^2\sin^2\varphi$$

$$= \cos^2\varphi-\sin^2\varphi+i(2\cos\varphi\sin\varphi)$$ ។

តាមស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2 = \cos2\varphi+i\sin2\varphi$$ ។

ផ្ទឹមលទ្ធផលទាំង 2 យើងទាញបាន $\cos2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$ និង $\sin2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$

គឺជារូបមន្តត្រីកោណមាត្រដែលបានស្រាយបញ្ជាក់រួចហើយ

- ករណី $n=3$

តាមស្វ័យគុណនៃផលបូកទ្វេធាតុ

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi+3\cos^2\varphi(i\sin\varphi)+3\cos\varphi(i\sin\varphi)^2+(i\sin\varphi)^3$$

$$= \cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi$$

$$= \cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi)$$ ។

តាមស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$ ។

យើងទាញបាន $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ និង

$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi$

- ករណី $n = 4$

តាមស្វ័យគុណនៃផលបូកទ្វេធាតុ

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos^4\varphi + 4\cos^3\varphi(i\sin\varphi) + 6\cos^2\varphi(i\sin\varphi)^2 + 4\cos\varphi(i\sin\varphi)^3 + (i\sin\varphi)^4$$

$$= \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi$$

$$= \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + i(4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi)$$ ។

តាមស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi$ ។

យើងទាញបាន $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ និង $\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$

3. ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ w ជាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច z នោះគេបាន $w^n = z$ ។ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z និង w គឺ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ និង $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ។

គេបាន $w^n = [s(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n$

$= s^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ ។

ដោយ $w^n = z$ គេបាន $s^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា ម៉ូឌុលរបស់វាក៏ស្មើគ្នាដែរ ។ គេទាញបាន $s^n = r$ ដោយ $s > 0$ និង $r > 0$ នោះ $s = \sqrt[n]{r}$ ។

$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$ គេទាញបាន $\cos n\alpha = \cos\varphi$, $n\alpha = \varphi + 2k\pi$

$\alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។

ជំនួស $\alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ និង $s = \sqrt[n]{r}$ ក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច w គេបាន

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$ ។

បើគេជំនួស $k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$ គេបាន n ឫសទី n ផ្សេងៗគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច z ។

ជាទូទៅ បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ ហើយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ z មាន n ឫសទី n កំណត់ដោយ :

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$

ឧទាហរណ៍ 1 គណនាឫសទី 5 នៃចំនួនកុំផ្លិច $-1+i$ រួចតាងចំណុចរូបភាពនៃឫសទាំងនោះលើរង្វង់ ។

តាង $z = -1+i$ ដែល $a = -1$ និង $b = 1$ គេបាន $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ។

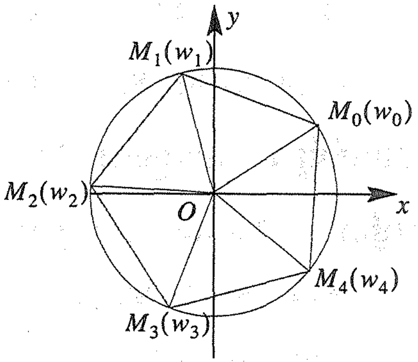
គេបាន $z = -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

ឫសទី 5 នៃ z កំណត់ដោយ

$$w_k = 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{5}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{3\pi + 8k\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi + 8k\pi}{20}\right)\right]$$

ដែល $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ។



បើ $k = 0$ នោះ $w_0 = 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)\right]$

បើ $k = 1$ នោះ $w_1 = 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{3\pi + 8\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi + 8\pi}{20}\right)\right]$

$$= 2^{\frac{1}{10}}\left(\cos\frac{11\pi}{20} + i\sin\frac{11\pi}{20}\right)$$

បើ $k = 2$ នោះ $w_2 = 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{3\pi + 16\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi + 16\pi}{20}\right)\right] = 2^{\frac{1}{10}}\left(\cos\frac{19\pi}{20} + i\sin\frac{19\pi}{20}\right)$

បើ $k = 3$ នោះ $w_3 = 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{3\pi + 24\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi + 24\pi}{20}\right)\right] = 2^{\frac{1}{10}}\left(\cos\frac{27\pi}{20} + i\sin\frac{27\pi}{20}\right)$

បើ $k = 4$ នោះ $w_4 = 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{3\pi + 32\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi + 32\pi}{20}\right)\right] = 2^{\frac{1}{10}}\left(\cos\frac{35\pi}{20} + i\sin\frac{35\pi}{20}\right)$ ។

ចំណុច M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 តាង w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 ជាកំពូលនៃបញ្ចកោណនិយ័ត

ឧទាហរណ៍ 2 គណនាឫសទី 4 នៃចំនួនកុំផ្លិច $-8+i8\sqrt{3}$ រួចតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់ ។

តាង $z = -8 - i8\sqrt{3}$ ដែល $a = -8$ និង $b = -8\sqrt{3}$ គេបាន $r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$

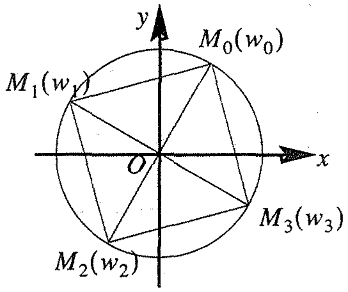
ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ហេតុនេះ $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ ។

គេបាន $z = -8 - i8\sqrt{3} = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

ឫសទី 4 នៃ z កំណត់ដោយ :

$$w_k = 16^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right]$$ ដែល $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ ។

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{12}\right)\right]$$



បើ $k = 0$ នោះ $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

បើ $k = 1$ នោះ $w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

បើ $k = 2$ នោះ $w_2 = 2\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

បើ $k = 3$ នោះ $w_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$ ។

ចំណុច $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ តាង $w_0,\ w_1,\ w_2,\ w_3$ ជាកំពូលនៃការេ

លំហាត់គំរូ 1 ដោះស្រាយសមីការ $z^6 + 64 = 0$ ។

ចម្លើយ $z^6 = -64$, z ជាឫសទី6 នៃ -64 ។

$-64 = -64 + 0i$ មានម៉ូឌុល $r = \sqrt{(-64)^2 + 0} = 64$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{64}{64} = -1$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{0}{64} = 0$ ហេតុនេះ $\varphi = \pi$ ។

គេបាន $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$ ឫសទី 6 នៃ -64 កំណត់ដោយ :

$$w_k = 64^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right]$$ ដែល $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ ។

បើ $k = 0$ នោះ $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

បើ $k = 1$ នោះ $w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

បើ $k = 2$ នោះ $w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

បើ $k = 3$ នោះ $w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$

បើ $k = 4$ នោះ $w_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$

បើ $k = 5$ នោះ $w_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{22\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$ ។

ដូចនេះ z ស្មើនឹង $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$ និង $\sqrt{3} - i$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ដោះស្រាយសមីការ $(z-2)^3 = 1$ ។

ចម្លើយ $(z-2)^3 = 1$, $z-2$ ជាឫសគូបនៃ 1

$1 = 1 + 0i$ មានម៉ូឌុល $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

ដោយ $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{1} = 1$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{0}{1} = 0$ ហេតុនេះ $\varphi = 0$ ។

គេបាន $1 = \cos 0 + i\sin 0$

ឫសទី 3 នៃ 1 កំណត់ដោយ

$$w_k = \cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) \text{ ដែល } k = 0 \text{ , } 1, \text{ } 2 \text{ ។}$$

បើ $k = 0$ នោះ $w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

បើ $k = 1$ នោះ $w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

បើ $k = 2$ នោះ $w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ដោយ $z - 2 = \sqrt[3]{1}$, $z = \sqrt[3]{1} + 2$

បើ $w_0 = 1$ នោះ $z_0 = 1 + 2 = 3$

បើ $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ នោះ $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 2$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

បើ $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ នោះ $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 2$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ ឫសនៃសមីការមាន $z_0 = 3$, $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

លំហាត់គំរូ 3 ដោះស្រាយសមីការ $z^6+2z^3+1=0$ ។

ចម្លើយ $z^6+2z^3+1=(z^3+1)^2$

គេបាន $(z^3+1)^2=0$, $z^3=-1$ ឬ z ជាឫសគូបនៃ -1 ។

តែ $-1=-1+0i$ ដែល $a=-1$ និង $b=0$ គេបាន $r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$

ដោយ $\cos\varphi=\frac{a}{r}=-\frac{1}{1}=-1$ និង $\sin\varphi=\frac{b}{r}=0$ ហេតុនេះ $\varphi=\pi$

គេបាន $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

ឫសទី 3 នៃ -1 កំណត់ដោយ

$w_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$ ដែល $k=0$, 1, 2 ។

បើ $k=0$ នោះ $w_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

បើ $k=1$ នោះ $w_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

បើ $k=2$ នោះ $w_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

ដូចនេះ ឫសនៃសមីការគឺ $z_0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_1=-1$ និង បើ $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គណនាឫសទី 5 នៃ $-\sqrt{3}-i$ រួចតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់ ។

ប្រតិបត្តិ 2 ដោះស្រាយសមីការ $z^6+1=0$ ។

លំហាត់

1. គណនា ក. $(1+i)^{12}$ ខ. $(1-i)^{10}$ គ. $(3+3i)^5$ ឃ. $(-4\sqrt{3}+4i)^5$

ង. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$ ច. $(\sqrt{3}+i)^7$ ឆ. $(-1+i)^{50}$ ជ. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{25}$ ។

2. គណនាចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម :

ក. $u = (1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$ ខ. $v = (1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$ ។

3. សរសេរចំនួនខាងក្រោម ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ ខ. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ គ. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$ ។

4. បង្ហាញថា ក. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ ខ. $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$ ។

5. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ ។

ក. ដៅចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6,\ z^7$ លើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

ខ. កំណត់តំលៃនៃ $1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{11}$ ។

6. គណនា ក. $\sqrt{9\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ ខ. $\sqrt[8]{-1}$ គ. $\sqrt[5]{1+i}$

ឃ. $\sqrt[4]{-2-i2\sqrt{3}}$ ង. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$ ច. $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$

7. គណនាឫសទី 5 នៃ $-\sqrt{3}-i$ ហើយតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

8. គណនាឫសទី 6 នៃ 1 ហើយតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

9. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $z^4-8(-1+i\sqrt{3}) = 0$ ខ. $z^3+8i = 0$

គ. $z^4+81 = 0$ ឃ. $z^3+27i = 0$

ង. $z^3-4\sqrt{3}+4i = 0$ ច. $z^5+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i = 0$ ។

មេរៀនទី 4

អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

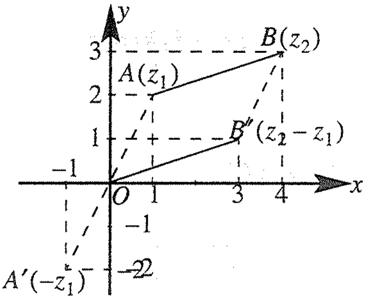
1. ចំងាយរវាងពីរចំណុច

វត្ថុបំណង

- គណនាចំងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច
- រកកូអរដោនេនៃចំណុចចែកក្នុងនិងចែកក្រៅ
- រកសំណុំចំណុចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌដែលឱ្យ

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+2i$ និង $z_2 = 4+3i$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ដែលមានរូបភាពតាងដោយ $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ។ យើងចង់ដឹងថា តើចម្ងាយរវាង A និង B ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

(មើលរូបខាងក្រោម)



ភ្ជាប់ចំណុច O និង A គេបាន OA ។ តាមចំណុច O គូសអង្កត់ស្របនឹង AB ហើយតាមចំណុច B គូសអង្កត់ស្របនឹង AO អង្កត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច B' ។

គេបានចតុកោណ $OAB'B$ ជាប្រលេឡូក្រាម

វិបាក $OA = BB'$ និង $[OA] /\!/ [BB']$ ។

តាង $A'(-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $-z_1$ គេបាន $OA = OA'$ ។

$OA = B'B$ ហើយ $OA = OA'$, $B'B = OA'$ ចតុកោណ $OA'B'B$ មាន $OA' = BB'$ និង $[OA'] /\!/ [BB']$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។ គេបាន $B'(z_2 - z_1)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_2 - z_1$ ។

ដោយ $AB = OB'$ នោះ $AB = |z_2 - z_1|$

$$= |4+3i-1-2i|$$

$$= |3+i|$$

$$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

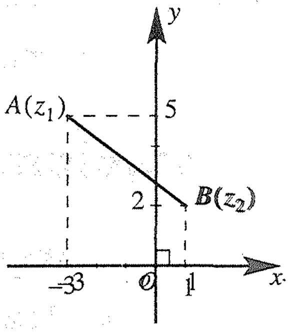
ម្យ៉ាងទៀត $|z_1-z_2| = |1+2i-4-3i| = |-3-i| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

ដូចនេះ ប្រវែងនៃ $AB = \sqrt{10}$ ឯកតា ។

ជាទូទៅ បើ $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នោះចម្ងាយ $AB = |z_2-z_1| = |z_1-z_2|$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គណនាចំងាយរវាង A និង B ដែលតាងចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -3+5i$ និង $z_2 = 1+2i$ ។

តាង $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ z_1 និង z_2



អនុវត្តរូបមន្ត $AB = |1+2i+3-5i|$

$= |4-3i|$

$= \sqrt{16+9} = 5$ ដូចនេះ $AB = 5$ ឯកតា ។

លំហាត់គំរូ 1 គណនាចម្ងាយរវាងចំណុច A និង B តាងចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a_1+b_1i$ និង $z_2 = a_2+b_2i$ ។

ចម្លើយ តាង $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ z_1 និង z_2 ។

គេបាន $AB = |z_2-z_1|$

$= |a_2+b_2i-a_1-b_1i|$

$= |(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)|$

$= \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$

ដូចនេះ ប្រវែង $AB = \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -5+2i$, $z_2 = 3+6i$ និង $z_3 = 4-6i$ ។ A,B,C ជារូបភាពនៃ z_1, z_2, z_3 នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ចម្លើយ ចម្ងាយរវាង A និង C គឺ $AC = |z_3-z_1|$

$= |4-6i+5-2i|$

$= |9-8i|$

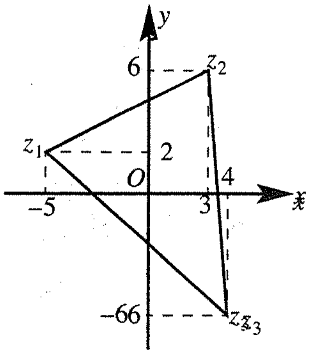
$AC = \sqrt{81+64} = \sqrt{145}$ ។

ចម្ងាយរវាង B និង C គឺ $BC = |z_3 - z_2|$

$= |4 - 6i - 3 - 6i|$

$= |1 - 12i|$

$= \sqrt{1+144} = \sqrt{145}$ ។



យើងបាន $AC = BC = \sqrt{145}$

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

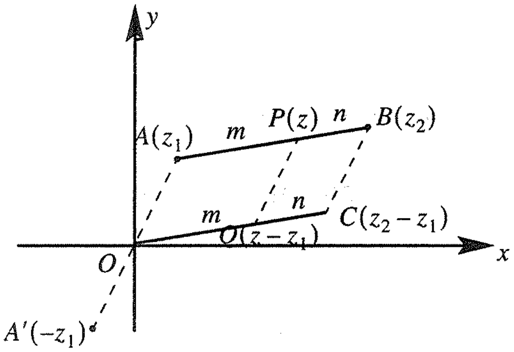
ប្រតិបត្តិ 1 គណនាចម្ងាយរវាង M និង N តាងចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+3i$ និង $z_2 = 4+2i$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1-i$ និង $z_3 = 11-6i$ ។

M, N, P ជារូបភាពនៃ z_1, z_2, z_3 នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ MNP ។

2. ចំណុចចែកអង្កត់តាមផលធៀបមួយ

ឧទាហរណ៍ 1 គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a_1 + b_1 i$ និង $z_2 = a_2 + b_2 i$ ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុច $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ រៀងគ្នា ។ តាងចំណុច $P(z)$ ជា រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលស្ថិតនៅលើ $[AB]$ ហើយចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $m : n$ ។ យើងចង់រកចំនួនកុំផ្លិច z ។



ភ្ជាប់ចំណុច O និង A ។ តាមចំណុច O គូសអង្កត់ស្របនឹង $[AB]$ ហើយតាមចំណុច B គូសអង្កត់ស្របនឹង $[OB]$ អង្កត់ទាំងពីរជួបគ្នាត្រង់ចំណុច C ។

តាមចំណុច P គូសបន្ទាត់ស្របនឹង $[AO]$ កាត់ $[OC]$ ត្រង់ចំណុច Q ។ តាង $A'(-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $-z_1$ ។

គេបាន $Q(z-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z+(-z_1)$ ឬ $z-z_1$

$C(z_2-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z_2+(-z_1)$ ឬ z_2-z_1 ។

$\frac{m}{m+n} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, $z - z_1 = \frac{m}{m+n}(z_2-z_1)$

$$z = \frac{m}{m+n}(z_2-z_1)+z_1 = \frac{mz_2}{m+n} - \frac{mz_1}{m+n} + \frac{mz_1+nz_1}{m+n} = \frac{nz_1+mz_2}{m+n}$$

ដូចនេះ $z = \frac{nz_1+mz_2}{m+n}$ ។

PROEUS DARA

ម្យ៉ាងទៀត $z = \dfrac{nz_1 + mz_2}{m+n} = \dfrac{z_1 + \frac{m}{n}z_2}{1+\frac{m}{n}}$ បើគេតាង $\dfrac{m}{n} = \lambda$ គេបាន $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ ។

> **ជាទូទៅ** បើគេមាន z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ហើយចំណុច $P(z)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ស្ថិតនៅលើ AB ហើយចែក AB តាមផលធៀប $m : n$ នោះគេបាន $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\lambda = \dfrac{m}{n}$ ។

សំគាល់ - បើ $\lambda = 1$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅកណ្តាលអង្គត់ $[AB]$

- បើ $\lambda > 0$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅចន្លោះ A និង B
- បើ $\lambda < 0$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅលើបន្លាយនៃ $[AB]$ ឬនៅក្រៅ $[AB]$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2+4i$ និង $z_2 = 8+6i$ ដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ចំណុច $P(z)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $AP : PB = 2 : 1$ គណនា z ។

តាមរូបមន្ត $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\lambda = 2$

$$= \frac{2+4i+2(8+6i)}{1+2} = \frac{18+16i}{3}$$

ដូចនេះ $z = 6 + i\dfrac{16}{3}$ ។

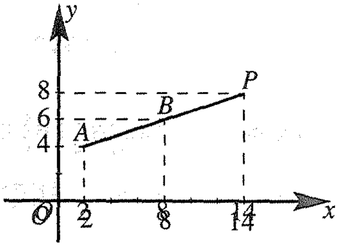
ឧទាហរណ៍ 3 គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2+4i$ និង $z_2 = 8+6i$ ដែលមានរូបភាពជាចំណុច $A(2,\ 4)$ និង $B(8,\ 6)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច P ដែលចែកអង្គត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $AP : PB = -2$

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច P កណ្តាល $[AB]$ ។

ចម្លើយ ក. តាមរូបមន្ត $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$

ដែល $\lambda = -2$ នាំឱ្យចំណុច P ស្ថិត នៅលើបន្លាយនៃ AB ។



$$z = \frac{2+4i-2(8+6i)}{1-2} = 14+8i$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច P ដែលចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $AP : PB = -2$ គឺ $P(14,\ 8)$ ។

ខ. តាមរូបមន្ត $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\lambda = 1$

$$= \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2+4i+8+6i}{2} = 5+5i$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ P កណ្ដាល AB គឺ $P(5,\ 5)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 7+4i$ និង $z_2 = 10-2i$ ដែលមានរូបភាពជាចំណុច $A(7,\ 4)$ និង $B(10,\ -2)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ដែលចែកអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $AM : MB = 0.2$ ។

ចម្លើយ តាមរូបមន្ត $z = \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} = \dfrac{7+4i+0.2(10-2i)}{1+0.2} = \dfrac{7+4i+2-0.4i}{1.2}$

$$= \frac{9+3.6i}{1.2} = 7.5+3i$$

ដូចនេះ ចំណុច $M(7.5,\ 3)$ ជារូបភាពនៃ $z = 7.5+3i$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -3-7i$ និង $z_2 = 10+2i$ ដែលមានរូបភាព $A(-3,\ -7)$ និង $B(10,\ 2)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ដែលចែកអង្កត់ $[AB]$ ត្រង់ចំណុច $\frac{1}{3}$ នៃ AB ។

ចម្លើយ ចំណុច M ចែកអង្កត់ $[AB]$ ត្រង់ $\frac{1}{3}$ នៃ AB មានពីរករណី

- ករណី $AM : MB = \frac{1}{2}$

គេបាន $z = \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} = \dfrac{-3-7i+\frac{1}{2}(10+2i)}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2-6i}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} - 4i$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ $M\left(\frac{4}{3},\ -4\right)$ ។

- ករណី $AM : MB = 2 : 1$

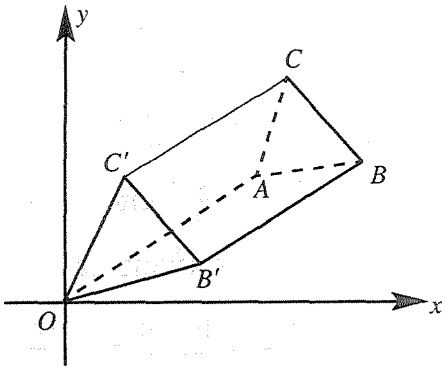
គេបាន $z = \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} = \dfrac{-3-7i+2(10+2i)}{1+2} = \dfrac{17-3i}{3} = \left(\dfrac{17}{3} - i\right) = \dfrac{17}{3} - i$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ $M\left(\frac{17}{3},\ -1\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 6+4i$ និង $z_2 = 1+9i$ ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុច $A(6,\ 4)$ និង $B(1,\ 9)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ដែលចែកអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $AM : MB = 2 : 3$ ។

3. ផលធៀបជ្រុងនិងមុំនៃត្រីកោណក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច គេតាងចំនួនកុំផ្លិច z, z_1 និង z_2 ដោយចំណុចរៀងគ្នា A, B និង C ។ គេបានត្រីកោណ ABC (រូបខាងស្តាំ)។ ដើម្បីគណនា $\angle BAC$ ដោយប្រើចំនួនកុំផ្លិច គេសង់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC}$ ។ គេបាន ABC និង $OC'B'$ ជាត្រីកោណដូចគ្នា ហើយ $\angle BAC = \angle B'OC'$ ។



$\overrightarrow{AB}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z$ ហើយ $\overrightarrow{AC}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_2 - z$ ។

យើងបាន $\overrightarrow{OB'}(z_1 - z)$ និង $\overrightarrow{OC'}(z_2 - z)$

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB'}) = \arg(z_1 - z) \text{ និង } (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC'}) = \arg(z_2 - z)$$

ហើយ $\angle B'OC' = \arg(z_2 - z) - \arg(z_1 - z) = \arg\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right)$

ដូចនេះ $\angle BAC$ កំណត់ដោយ $\angle BAC = \arg\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right)$ ផលធៀបជ្រុងនៃត្រីកោណ

$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_2 - z|}{|z_1 - z|} = \left|\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right|$ ។

ជាទូទៅ បើ $A(z)$, $B(z_1)$ និង $C(z_2)$ បង្កើតបានត្រីកោណ ABC នោះគេបាន

$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right|$ ហើយ $\angle BAC = \arg\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 បើ $A(-1-i)$, $B(1+i)$ និង $C(-1+i)$ បង្កើតបានត្រីកោណ ABC ។ គណនាផលធៀប $\frac{AC}{AB}$ និង $\angle BAC$ នៃត្រីកោណ ABC ។

តាមរូបមន្ត $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right|$

តែ $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = \frac{-1 + i - (-1 - i)}{1 + i - (-1 - i)} = \frac{i}{1 + i}$

$$\left|\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right| = \left|\frac{i}{1 + i}\right| = \frac{|i|}{|1 + i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

$$\angle BAC = \arg\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right) = \arg\left(\frac{i}{1+i}\right)$$
$$= arg\, i - arg(1+i)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេឱ្យចំណុច M, M_1 និង M_2 ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច z, $z_1 = 2 - 3i$ និង $z_2 = i$ ។ ចូរកំណត់ចំណុច M ដែល $\frac{MM_1}{MM_2} = 3$ ។

ចម្លើយ $\frac{MM_1}{MM_2} = \left|\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right| = \frac{|z_1 - z|}{|z_2 - z|}$ តាមចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$

$$= \frac{|2 - 3i - x - yi|}{|i - x - yi|}$$
$$= \frac{|(2-x) + (-3-y)i|}{|-x + (1-y)i|}$$

តែ $|(2-x) + (-3-y)i| = \sqrt{(2-x)^2 + (-3-y)^2}$

$|(-x) + (1-y)i| = \sqrt{(-x)^2 + (1-y)^2}$

គេបាន $\frac{\sqrt{(2-x)^2 + (-3-y)^2}}{\sqrt{(-x)^2 + (1-y)^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{(2-x)^2 + (-3-y)^2}{x^2 + (1-y)^2} = 9$

$$\frac{4 + 4x + x^2 + 9 + 6y + y^2}{x^2 + 1 - 2y + y^2} = 9$$
$$13 - 4x + x^2 + 6y + y^2 = 9x^2 + 9 - 18y + 9y^2$$
$$2(x^2 + 2x) + 2(y^2 - 3y) - 1 = 0$$
$$2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 1 = 0$$
$$2[(x+1)^2 - 1] + 2\left[\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] - 1 = 0$$
$$2(x+1)^2 - 2 + 2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} - 1 = 0$$
$$2(x+1)^2 + 2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{2}$$
$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

ដូចនេះសំណុំចំណុច M គឺជារង្វង់ផ្ចិត $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ និងកាំស្មើ $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យចំណុច M, M_1 និង M_2 ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច z, $z_1 = -2i$ និង $z_2 = 2i$ ។ ចូរកំណត់ចំណុច M ដែល $arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ។

ចម្លើយ តាង $z = x + yi$

គេបាន $\dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \dfrac{x + yi + 2i}{x + yi - 2i} = \dfrac{x + i(y+2)}{x + i(y-2)}$

$$= \frac{[x + i(y+2)][x - i(y-2)]}{[x + i(y-2)][x - i(y-2)]}$$

$$= \frac{x^2 - ix(y-2) + ix(y+2) + y^2 - 4}{x^2 + (y-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 4 + 4xi}{x^2 + (y-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{4x}{x^2 + (y-2)^2}\, i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{4x}{x^2 + (y-2)^2}\, i\right) = \frac{\pi}{4}$$

គេបាន $\dfrac{\dfrac{4x}{x^2 + (y-2)^2}}{\dfrac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y-2)^2}} = \tan\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{4x}{x^2 + (y-2)^2} \times \frac{x^2 + (y-2)^2}{x^2 + y^2 - 4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 4x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 8$$

ដូចនេះសំណុំចំណុច M គឺជារង្វង់មានផ្ចិត $(2, 0)$ និងមានកាំស្មើនឹង $2\sqrt{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យចំណុច A, B និង C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $z = -1 - i$, $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = -1 + i$ ។ គណនាផលធៀបជ្រុង និងមុំនៃត្រីកោណ ABC

ក. $\dfrac{AC}{AB}$ និង $\angle BAC$

ខ. $\dfrac{CB}{CA}$ និង $\angle BCA$

គ. $\dfrac{BA}{BC}$ និង $\angle ABC$ ។

4. សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ពិនិត្យមើលចំនួនកុំផ្លិច $z = x+yi$ និងរូបភាពនៃ z ដែលតាងដោយចំណុច $P(x, y)$ នៅប្លង់កុំផ្លិច ។ បើគេឱ្យលក្ខខណ្ឌដែល z ត្រូវតែបំពេញតាម នោះសំណុំនៃរូបភាព P ទាំងអស់ដែលអាចមាន បង្កើតបានជាសំណុំចំណុច P ។

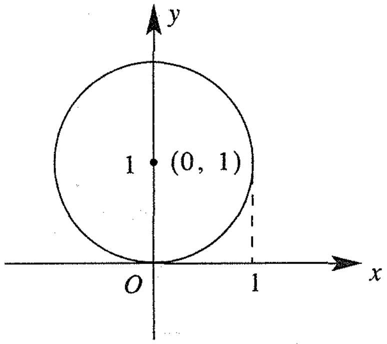
ឧទាហរណ៍ 1 រកសំណុំចំណុច P ជារូបភាពនៃ z ដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ $|z-i| = 1$ ។

តាងចំនួនកុំផ្លិច $z = x+yi$

គេបាន $|x+yi-i| = 1 \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = 1$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 1$$

$$x^2+(y-1)^2 = 1$$



ដូចនេះសំណុំចំណុច P គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(0, 1)$ និងកាំស្មើនឹង 1 ។

ឧទាហរណ៍ 2 រកសំណុំចំណុច P ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ $|z-3| = |z-2i|$ ។

តាង $z = x+yi$ គេបាន

$$|x+yi-3| = |x+yi-2i|$$

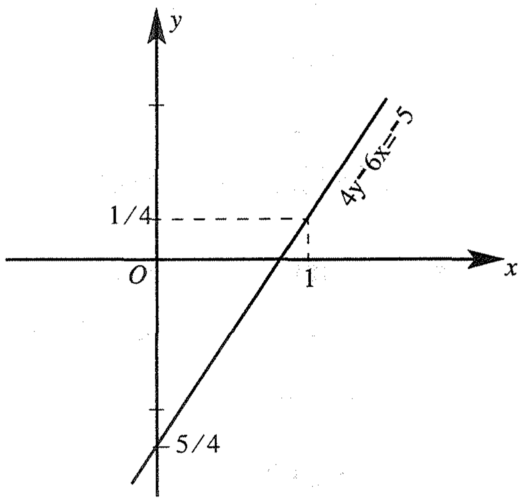
$$|(x-3)+yi| = |x+(y-2)i|$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$(x-3)^2+y^2 = x^2+(y-2)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2-4y+4$$

$$-6x+4y = -5$$



ដូចនេះ សំណុំចំណុច P គឺជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $4y-6x = -5$ ។

ឧទាហរណ៍ 3 រកសំណុំចំណុច P ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ $arg(z+1) = \frac{3\pi}{4}$ ។

តាង $z = x + yi$ ដោយ $\arg(z+1) = \frac{3\pi}{4}$

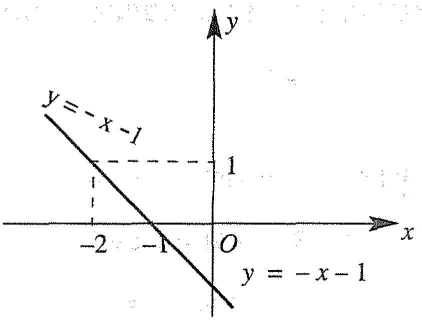
$\arg(x+1+yi) = \frac{3\pi}{4}$

គេបាន

$\frac{y}{x+1} = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$

$\frac{y}{x+1} = -1$, $y = -x - 1$ ។

ដូចនេះ សំណុំចំណុច P គឺជាបន្ទាត់ដែលមាន



សមីការ $y = -x - 1$ ដែល $y \geq 0$ ។

លំហាត់គំរូ 1 រកសំណុំចំនួន P ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញតាមល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម៖

ក. $|z| = 3$

ខ. $|z+2i| = |z-1|$

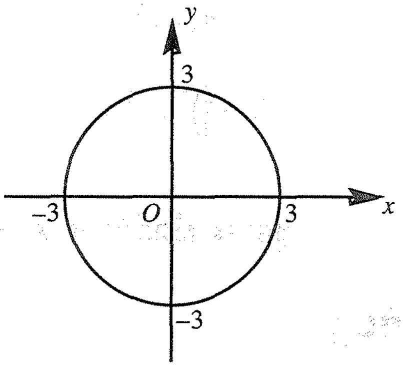
ចម្លើយ ក. ឧបមាថា $z = x + yi$

គេបាន $|x+yi| = 3$, $\sqrt{x^2+y^2} = 3$

$x^2 + y^2 = 9$

ដូចនេះសំណុំចំណុច P គឺជារង្វង់ដែលមាន

ផ្ចិតស្ថិតនៅចំគល់នៃអ័ក្ស និងមានកាំស្មើនឹង 3 ។



ខ. ឧបមាថា $z = x + yi$

គេបាន $|z+2i| = |z-1|$, $|x+yi+2i|$

$= |x+yi-1|$

$|x+(y+2)i| = |(x-1)+yi|$

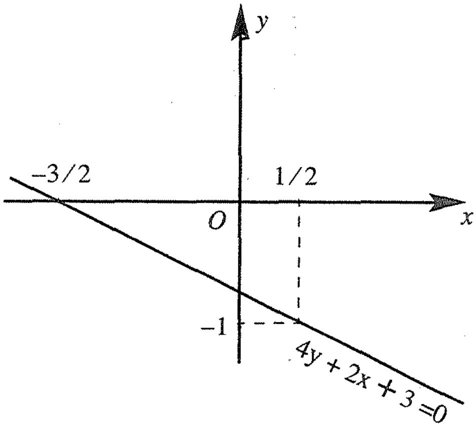
$\sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$x^2+y^2+4y+4 = x^2-2x+1+y^2$

$4y+2x+3 = 0$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច P គឺជាបន្ទាត់ដែល

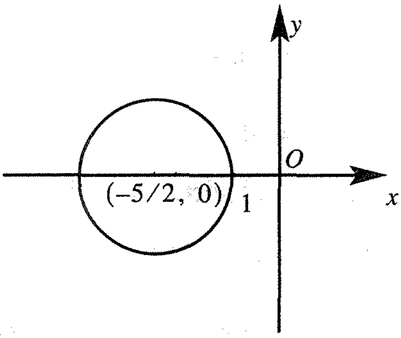
មានសមីការ $4y+2x+3 = 0$ ។



PROEUS DARA

លំហាត់គំរូ 2 រកសំណុំចំណុច P ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ $|z-2| = 3|z+2|$

ចម្លើយ ឧបមាថា $z = x+yi$



គេបាន $|z-2| = 3|z+2|$

$$|x+4i-2| = 3|x+yi+2|$$

$$|(x-2)+yi| = 3|(x-2)+yi|$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

$$(x-2)^2+y^2 = 9[(x-2)^2+y^2]$$

$$x^2-4x+4+y^2 = 9(x^2+4x+4+y^2)$$

$$x^2+5x+4+y^2 = 0$$

$$x^2+5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+4+y^2 = 0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2 = \frac{9}{4}$$ ។

ដូចនេះ សំណុំចំណុច P គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ ហើយមានកាំស្មើនឹង $\frac{3}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ

រកសំណុំចំណុច P ដែលជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ហើយបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក. $\arg z = \frac{\pi}{4}$

ខ. $|z-18| = 2|z+18i|$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានរាង $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។ ហើយ $i^2 = -1$
- ចំនួនកុំផ្លិច $a+bi$ និង $c+di$ ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a = c$ និង $b = d$ ។
- ផលបូកចំនួនកុំផ្លិច $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+i(b+d)$
- ផលដកចំនួនកុំផ្លិច $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+i(b-d)$
- ផលគុណចំនួនកុំផ្លិច $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+i(ad+bc)$
- ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ តាងដោយ $\bar{z} = a-bi$ ។
- ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ តាងដោយ $-z = -a-bi$ ។
- បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ នោះម៉ូឌុលនៃ z តាងដោយ $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ។
- លក្ខណៈម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច
  - បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
  - បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះគេបាន $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$
- វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z តាង φ ជាមុំតូចបំផុតនៃ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ φ ហៅថា អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ។ ដើម្បីគណនាមុំ φ យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ ។
- បើ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ នោះគេបាន
  - $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$
  - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$
  - $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ គ្រប់ n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។

គេអាចទាញបាន $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ ហៅថាទ្រឹស្តីបទដឺម័រ ។

- បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ ហើយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ z មាន n ឫសទី n គឺ $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ ។
- បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចមានរូបភាពរៀងគ្នា តាងដោយចំណុច A និង B នោះ ប្រវែង $AB = |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$ ។
- បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា តាងដោយ $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ហើយចំណុច $P(z)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ស្ថិតនៅលើ AB ចែក AB តាមផលធៀប $m : n$ នោះគេបាន $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\lambda = \dfrac{m}{n}$ ។
  - បើ $\lambda = 1$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅកណ្ដាលអង្កត់ AB
  - បើ $\lambda > 0$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅចន្លោះ A និង B
  - បើ $\lambda < 0$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅលើបន្លាយនៃ AB ឬនៅក្រៅអង្កត់ AB ។
  - បើ $A(z)$, $B(z_1)$ និង $C(z_2)$ បង្កើតបានត្រីកោណ ABC

គេបាន $\dfrac{AC}{AB} = \left|\dfrac{z_2 - z}{z_1 - z}\right|$ ហើយ $\angle BAC = \arg\left(\dfrac{z_2 - z}{z_1 - z}\right)$ ។

លំហាត់

1. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $3 - 2i$ និង $4 + 5i$ ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុចរៀងគ្នា A និង B ។ គណនាប្រវែង AB ។

2. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $1 - 3i$ និង $2 + i$ ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុចរៀងគ្នា A និង B ។

   ក. គណនាប្រវែង AB

   ខ. រកកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាល AB ។

3. ចំណុច A, B និង C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $2 + i$, -1 និង $3 - 2i$ ។ ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

4. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $3 + 2i$, $-1 - i$ និង $11 - 6i$ ដែលមានរូបភាពរៀងគ្នាតាងដោយចំណុច A, B និង C គណនាមេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

5. ចំណុច A, B, C និង D ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $-2+i$, $4i$, $\frac{7}{2}+2i$ និង $\frac{3}{2}-i$ ។ ប្រាប់ប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

6. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $6+4i$ និង $1+9i$ ដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា តាងដោយចំណុច A និង B ។ កំណត់រូបភាព M នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលចំណុច M ចែក AB តាមផលធៀប $AM : MB = 2 : 1$ ។

7. គេមានចំនួនកុំផ្លិច z, z_1 និង z_2 ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុចរៀងគ្នា A, B និង C ។ ដោយដឹងថា $\frac{z_2-z}{z_1-z} = 2+i2\sqrt{3}$ គណនាផលធៀប $\frac{AC}{AB}$ និង $\angle BAC$ នៃត្រីកោណ ABC ។

8. រកសំណុំចំណុច P នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក. $|z| = 5$

ខ. $|z-2| = 5$

គ. $|z-2i| = 4$

ឃ. $|z+2+2i| = 2\sqrt{2}$

ង. $|z+3-i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

ច. $2|z-i| = 3$ ។

9. រកសំណុំចំណុច P នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក. $\arg z = \frac{3\pi}{4}$

ខ. $\arg(z+2) = \frac{\pi}{2}$

គ. $\arg(z-3i) = \frac{\pi}{3}$ ។

10. រកសំណុំចំណុច P នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក. $|z-2| = |z-4|$

ខ. $|z-6| = |z+3|$

គ. $|z-1| = 3|z+2|$ ។

លំហាត់ជំពូក

1. គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 , z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ បើ

ក. $z_1 = 3+2i$ និង $z_2 = 1-7i$

ខ. $z_1 = \sqrt{3}-i\sqrt{5}$ និង $z_2 = \sqrt{3}+i\sqrt{5}$ ។

2. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z ខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត

ក. $z = \frac{-41+63i}{50} - \frac{6i+1}{1-7i}$

ខ. $z = \frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

គ. $z = \frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(2i+1)^2}{2+i}$

ឃ. $z = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^2$ ។

3. គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$ ។

4. បំប្លែងចំនួនខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $(\sqrt{3}-i)^{100}$

ខ. $1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$

5. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = \dfrac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}}$ សរសេរចំនួន z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់ពីជគណិត ។

6. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $z^4+8+i8\sqrt{3} = 0$

ខ. $z^2+|z|^2 = 0$ ។

7. ចំនួនកុំផ្លិច z បំពេញលក្ខខណ្ឌ $|z+3-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ ។ គណនា z ដែលមានអាគុយម៉ង់វិជ្ជមានតូចបំផុត ។

8. រកសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក. $|z-2i| = 4$

ឃ. $|z+2| < |z-2|$

ខ. $|z-1-3i| = 5$

ង. $|z-i| = |z-1|$

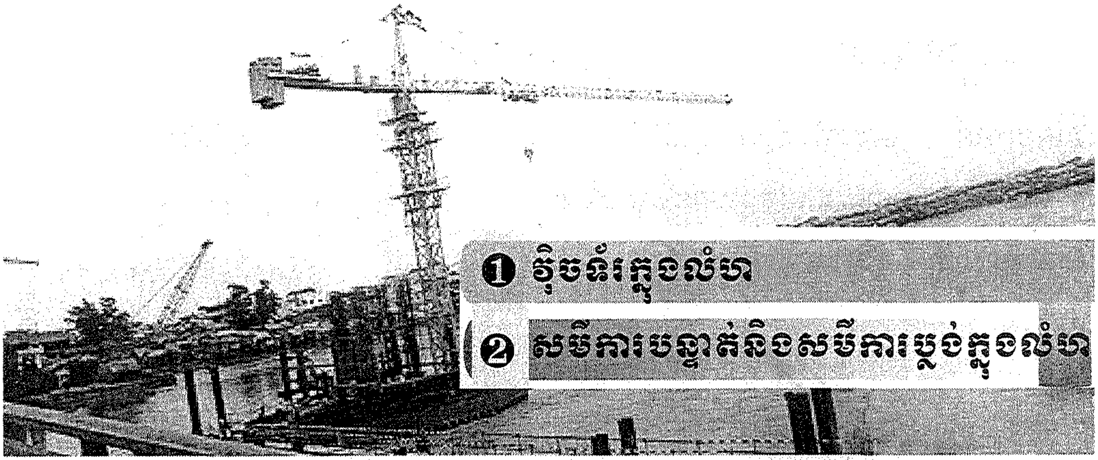
គ. $|z| = |z-2i|$

ច. $|z-4+i| = |z-1-2i|$

PROEUS DARA

ជំពូក 8

វិចទ័រក្នុងលំហ



យើងបានសិក្សាវិចទ័រក្នុងប្លង់រួចរាល់ហើយនៅថ្នាក់ទី 10 ឥឡូវយើងនឹងសិក្សាពីវិចទ័រក្នុងលំហម្តង ។

មូលដ្ឋានសំខាន់ៗនៃវិចទ័រក្នុងលំហ គឺដូចវិចទ័រក្នុងប្លង់ដែរ ប៉ុន្តែគ្រាន់តែយើងសិក្សាឱ្យស៊ីជម្រៅជាងមុនបន្តិច គឺយើងសិក្សាលើតម្រុយដែលមានអ័ក្សបី ឬគេហៅថា បីឌីម៉ង់ស្យុង ដើម្បីឱ្យកាន់តែស៊ីជម្រៅលើផ្នែកធរណីមាត្រ ។

យើងឃើញថាបន្ទាត់ត្រង់ យើងសិក្សាលើអ័ក្សមួយ (មួយឌីម៉ង់ស្យុង) រីឯប្លង់យើងសិក្សាលើអ័ក្សពីរ (ពីរឌីម៉ង់ស្យុង) ចំណែកឯស្វ៊ែរវិញ យើងសិក្សាលើអ័ក្សបី (បីឌីម៉ង់ស្យុង) ។ សព្វថ្ងៃយើងសិក្សាផងដែរទៅលើលំហដែលមានអ័ក្ស n(n ឌីម៉ង់ស្យុង) ។ យើងឃើញថាទោះជាវិចទ័រមិនបានពង្រីកបញ្ញត្តិធរណីមាត្រឱ្យបានស៊ីជម្រៅយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏វាជាកម្មវត្ថុនៃគណិតវិទ្យាដែលរៀបរាប់ពី " វិចទ័រក្នុងលំហ " ដែរ ។ លក្ខណៈបែបនេះហើយ គឺជាវិធីសាស្ត្រដ៏ទំនើបដែលធ្វើឱ្យគណិតវិទ្យាកាន់តែរីកចម្រើនឡើង ។

លោក Giuseppe peano (1858-1932) ជាអ្នកគណិតវិទ្យាដែលលោកទទួលខុសត្រូវចំពោះស្វ័យសត្យនិយមន័យរបស់បញ្ញត្តិវិចទ័រក្នុងលំហ ហើយដែលបានផ្តល់ឱ្យយើងដឹងនូវប្រព័ន្ធស្វ័យសត្យ
13 នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិផងដែរ ។

មេរៀនទី 1

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

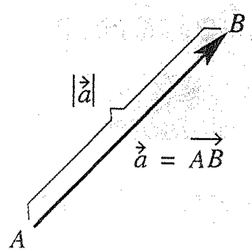
1. វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

1.1 សញ្ញាណវ៉ិចទ័រ

វត្ថុបំណង

- កំណត់និយមន័យនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
- គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
- គណនាប្រមាណវិធីលើវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
- គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ឧទាហរណ៍ ចលនានៃចំណុចផ្លាស់ទីពី A ទៅ B ក្នុងលំហ អាចតាងដោយអង្កត់មានទិសដៅAB ដែលមានព្រួញ (ដូចរូបខាងក្រោម) ។



អង្កត់មានទិសដៅ AB ហៅថា **វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ** ដែលមាន A ជាគល់ និង B ជាចុង ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{AB}$ ។

និយមន័យ	អង្កត់មានទិសដៅ AB នៅក្នុងលំហហៅថា វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ដែលមាន A ជាគល់ និង B ជាចុង ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{AB}$

ជាទូទៅ គេតាងអក្សរណាមួយក៏បានសម្រាប់តាងឱ្យវ៉ិចទ័រ ។

ឧទាហរណ៍ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{u},...$ ។ $AB = |\overrightarrow{AB}|$ ឬ $a = |\vec{a}|$ ហៅថាប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ឬ $\vec{a}$

PROEUS DARA

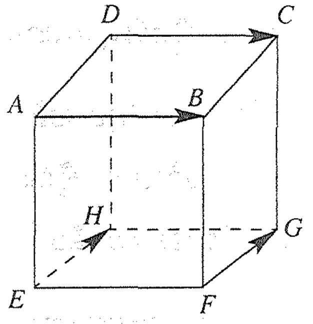
1.2 វ៉ិចទ័រស្មើគ្នានៅក្នុងលំហ

និយមន័យ

ឧទាហរណ៍ គេមានគូប $ABCD\text{-}EFGH$ មួយ ។

គេថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DC}$ មានប្រវែងស្មើគ្នានិងមានទិសដៅដូចគ្នា គេសរសេរ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ។

ដូចគ្នាដែរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ ។



ជាទូទៅ គេបានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ កាលណាវា

- ស្របគ្នា ឬមានទម្ររួម
- មានទិសដៅដូចគ្នា
- មានប្រវែងស្មើគ្នា ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$)

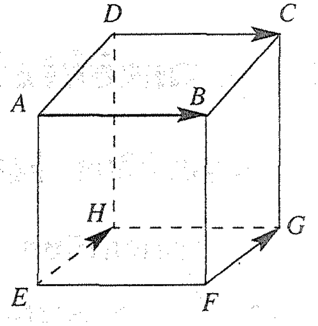
1.3 វ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នាក្នុងលំហ

និយមន័យ

ឧទាហរណ៍ គេមានគូប $ABCD\text{-}EFGH$ ។ គេថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{CD}$ មានប្រវែងស្មើគ្នា និងមានទិសដៅផ្ទុយគ្នា

គេសរសេរ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ឬ $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ នោះគេថា $\overrightarrow{CD}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នានឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

ដូចគ្នាដែរ $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{GF}$ ឬ $\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{EH}$ នោះគេថា $\overrightarrow{GF}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នានឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{EH}$ ។



ជាទូទៅ គេបានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ កាលណាវា :

- ស្របគ្នា ឬមានទម្ររួម
- មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា
- មានប្រវែងស្មើគ្នា ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$)

1.4 វ៉ិចទ័រសូន្យ

និយមន័យ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ ជា **វ៉ិចទ័រសូន្យ** លុះត្រាតែ $|\vec{a}| = 0$ ។

គេកំណត់វ៉ិចទ័រសូន្យដោយ $\overrightarrow{AA} = \vec{O}$, $\overrightarrow{BB} = \vec{O}, \ldots$ ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCD\text{-}EFGH$ មួយ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រដែលស្មើនឹង $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AE}$ ។

ខ. តើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AE}$ និង $\overrightarrow{HD}$ ជាវ៉ិចទ័រយ៉ាងដូចម្ដេចនឹងគ្នា ?

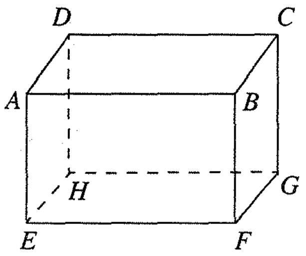
ចម្លើយ ក. តាមរូបគេបាន $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG}$ ។

ខ. វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{CB}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា ។

វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{FE}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា ។

វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AE}$ និង $\overrightarrow{HD}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា ។



ប្រតិបត្តិ គេឱ្យប្រលេពីប៉ែតទ្រេត $ABCD\text{-}EFGH$ មួយ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រដែលស្មើនឹង $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AE}$ ។

ខ. តើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AE}$ និង $\overrightarrow{HD}$ ជាវ៉ិចទ័រយ៉ាងដូចម្ដេចនឹងគ្នា ?

2. ប្រមាណវិធីនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

2.1 ប្រមាណវិធីបូក និងដក

ក. ប្រមាណវិធីបូក

ឧទាហរណ៍ គេមានប្រលេពីប៉ែត $ABCD\text{-}EFGH$ មួយដែលមានបាតជាប្រលេឡូក្រាម ។

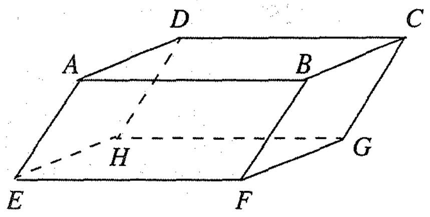
1. ករណីវ៉ិចទ័រតគ្នា

គេមាន $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$

នោះ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$

នោះគេថា $\overrightarrow{AF}$ **ជាផលបូករវាង** $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BF}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}}$



2. ករណីវ៉ិចទ័រមានគល់រួម

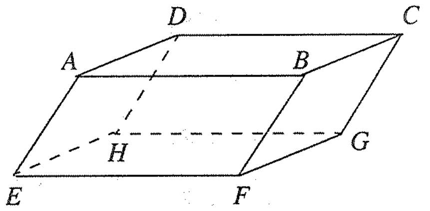
គេមាន $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$

នោះ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

នោះគេថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AG}$ ជាផលបូករវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AE}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}}$

ខ. ប្រមាណវិធីដក



គេមានប្រលេពីប៉ែត $ABCD\ EFGH$ មួយ ដែលមានបាតជាប្រលេឡូក្រាម ។

គេមាន $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ នោះ

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$

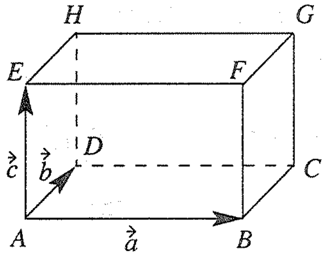
នោះគេថា វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{EB}$ ជាផលដករវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AE}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}}$

លំហាត់គំរូ គេឱ្យប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCD\ EFGH$ មួយ ។ គេតាង $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ និង $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ ។ ចូររកវ៉ិចទ័រ

ក. $\overrightarrow{AG}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}, \vec{b}$ និង $\vec{c}$

ខ. $\overrightarrow{FD}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}, \vec{b}$ និង $\vec{c}$



ចម្លើយ ក. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ។

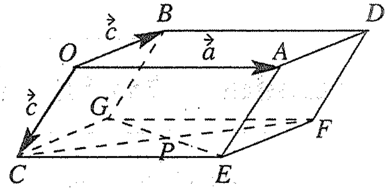
ខ. $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} = -\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$

$= -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យប្រលេពីប៉ែត $OADB\text{-}CEFG$ មួយ ។

គេតាង $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ និង $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ដូចរូប ។

គណនាជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}, \vec{b}$ និង $\vec{c}$ ចំពោះវ៉ិចទ័រ



ក. $\overrightarrow{AG}$

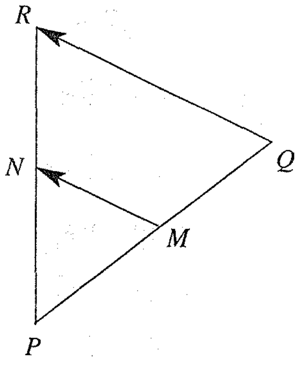
ខ. $\overrightarrow{OP}$

គ. $\overrightarrow{PD}$ ។

2.2 ប្រមាណវិធីគុណវ៉ិចទ័រនឹងចំនួនពិត

ក. និយមន័យ

ឧទាហរណ៍ ចំពោះរូបខាងក្រោមចំណុច M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង PQ និង PR របស់ត្រីកោណ PQR រៀងគ្នា។



ដោយ $\overrightarrow{QR}$ និង $\overrightarrow{MN}$ មានទិសដៅដូចគ្នា នោះ

$QR = 2MN$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{MN}$ និង

$MN = \frac{1}{2}QR$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

គេបានផងដែរ

$\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{MN}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{RQ} = -2\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RQ}$

តាមឧទាហរណ៍នេះ យើងទាញបាន

> វ៉ិចទ័រ $\vec{b}$ ដែល $\vec{b} = k\vec{a}$, $k \neq 0$ ជាវ៉ិចទ័រដែលកំណត់ដោយ ៖
>
> - $\vec{b} // \vec{a}$
> - $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$
> - $\vec{b}$ មានទិសដៅដូច $\vec{a}$ បើ $k > 0$ ហើយ $\vec{b}$ មានទិសដៅផ្ទុយ $\vec{a}$ បើ $k < 0$ ។

ខ. វ៉ិចទ័រស្រប

> **និយមន័យ** ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a} \neq \vec{0}$ និង $\vec{b} \neq \vec{0}$ ជាវ៉ិចទ័រស្របគ្នាលុះត្រាតែ $\vec{a} = m\vec{b}$ ដែល m ជាចំនួនពិត បានន័យថា $\vec{a} // \vec{b}$ សមមូល $\vec{a} = m\vec{b}$

2.3 វ៉ិចទ័រឯកតា

> **និយមន័យ** វ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែងស្មើនឹង 1 ហៅថា **វ៉ិចទ័រឯកតា**។

បើ $\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ នោះគេបាន $\vec{i} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតាដែលមានទិសដៅដូច $\vec{a}$ ។

2.4 លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីបូក និងប្រមាណវិធីគុណវ៉ិចទ័រនឹងចំនួនពិតក្នុងលំហ

> បើពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ នៅក្នុងលំហ ហើយពីរចំនួនពិត m និង n នោះគេបាន :
>
> (1). $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (2). $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
>
> (3). $(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$ (4). $(m+n)\vec{a} = m\vec{a}+n\vec{a}$ (5). $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a}+m\vec{b}$
>
> បើ $m\vec{a} = 0$ នោះគេបាន $m = 0$ ឬ $\vec{a} = \vec{0}$ ។

លំហាត់គំរូ

1. គណនាកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក. $3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$ ខ. $2(\vec{a}+5\vec{b})+3(2\vec{a}-\vec{b})$

2. រក $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ៖

ក. $2\vec{a}+\vec{x} = 3\vec{b}+2\vec{x}$ ខ. $4\vec{x}-\vec{a} = 3\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{x}$

ចម្លើយ

1. ក. $3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a} = (3+4-2)\vec{a} = 5\vec{a}$

ខ. $2(\vec{a}+5\vec{b})+3(2\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}+10\vec{b}+6\vec{a}-3\vec{b}$

$= (2+6)\vec{a}+(10-3)\vec{b}$

$= 8\vec{a}+7\vec{b}$

2. ក. $2\vec{a}+\vec{x} = 3\vec{b}+2\vec{x}$

$2\vec{x}-\vec{x} = 2\vec{a}-3\vec{b} \Leftrightarrow (2-1)\vec{x} = 2\vec{a}-3\vec{b}$

$\vec{x} = 2\vec{a}-3\vec{b}$

ខ. $4\vec{x}-\vec{a} = 3\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{x}$

$4\vec{x}-2\vec{x} = 3\vec{a}+\vec{a}-4\vec{b}$, $(4-2)\vec{x} = 4\vec{a}-4\vec{b}$

$2\vec{x} = 4(\vec{a}-\vec{b})$

$\vec{x} = 2(\vec{a}-\vec{b})$

ប្រតិបត្តិ

1. គណនាកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក. $3(2\vec{a}-\vec{b})+4(\vec{a}-2\vec{b})$ ខ. $2(-\vec{a}+3\vec{b})-(5\vec{a}-4\vec{b})$

គ. $\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})+\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$ ឃ. $\frac{1}{2}(-\vec{a}+2b)-\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$

2. រក $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ៖

ក. $3(\vec{a}+\vec{x}) = 2(\vec{x}-3\vec{b})$ ខ. $2\vec{b}-7\vec{x} = 3(4\vec{a}+\vec{b})+4(2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{x})$

គ. $3\vec{x}-2\vec{a} = \vec{x}-4\vec{b}$ ឃ. $2(\vec{a}+\vec{x})+3(\vec{b}-\vec{x}) = \vec{0}$

3. កូអរដោនេក្នុងលំហ

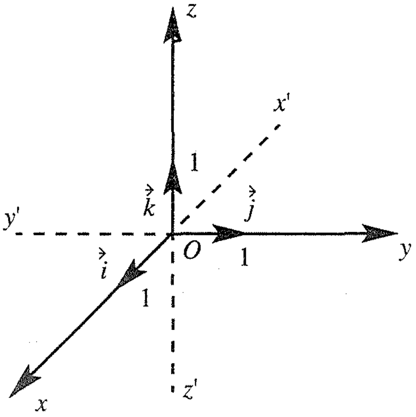
3.1 តម្រុយក្នុងលំហ

និយមន័យ គេហៅតម្រុយក្នុងលំហ គឺគ្រប់ចតុធាតុ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, O ជាចំណុចមួយក្នុងលំហ នឹង $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ជាបីវ៉ិចទ័រមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

ចំណុច O ហៅថា គល់តម្រុយ

- វ៉ិចទ័រ $\vec{i}$ ហៅថា **វ៉ិចទ័រឯកតា** នៃអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$
- វ៉ិចទ័រ $\vec{j}$ ហៅថា **វ៉ិចទ័រឯកតា** នៃអ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$
- វ៉ិចទ័រ $\vec{k}$ ហៅថា **វ៉ិចទ័រឯកតា** នៃអ័ក្សកូត (zz') ,

$(x'x)$, $(y'y)$, (zz') ហៅថាអ័ក្ស ។



3.2 កូអរដោនេនៃចំណុច

នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច P មួយ

គេតាងកូអរដោនេនៃ P ដោយ (x,y,z) ។

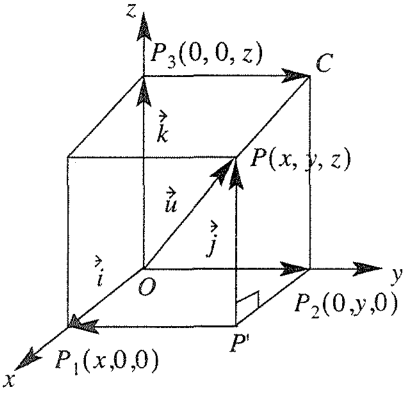
យកចំណុច

$P_1(x,0,0)$ នៅលើអ័ក្ស x

$P_2(0,y,0)$ នៅលើអ័ក្ស y

$P_3(0,0,z)$ នៅលើអ័ក្ស z

គេគូសបន្ទាត់ PP' ពីចំណុច P ឱ្យកែងទៅនឹងប្លង់ (xoy) ដូចក្នុងរូបខាងស្តាំ នោះគេបាន



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P'} + \overrightarrow{P'P}$ ។ តែ $\overrightarrow{P_1P'} = \overrightarrow{OP_2}$ និង $\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{OP_3}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3}$ (1)

ដោយ $P_1 \in (Ox)$, $P_2 \in (Oy)$ និង $P_3 \in (Oz)$ នោះមានចំនួនពិត x, y និង z ដែល $\overrightarrow{OP_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OP_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OP_3} = z\vec{k}$ ។

យក $\overrightarrow{OP_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OP_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OP_3} = z\vec{k}$ ទៅជំនួសចូលក្នុងទំនាក់ទំនង (1)

នាំឱ្យគេបានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ។ (x, y, z) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំណុច P

ទ្រឹស្តីបទនិងនិយមន័យ :	គេមានតម្រុយ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយក្នុងលំហ ចំពោះគ្រប់ចំណុច P មានត្រីធាតុ (x, y, z) តែមួយគត់ ដែល $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ។ ត្រីធាតុ (x, y, z) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំណុច P គេកំណត់សរសេរ $P(x, y, z)$ ហើយ x ជា **អាប់ស៊ីស** y ជា **អរដោនេ** និង z ជា **កូត** ។

ករណីពិសេស

វ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

ម្យ៉ាងទៀត $(x, y, z) = (x', y', z')$ សមមូល $(x = x', y = y', z = z')$ ។

សំគាល់

ក. បើ $z = 0$ គេបាន $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ នាំឱ្យ P ជាចំណុចមួយក្នុងប្លង់ xoy ។

ច្រាសមកវិញ បើ P ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ xoy នោះមានគូ (x, y) នៃចំនួនពិត ដែល $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ។

ខ. បើ $x = y = 0$ គេបាន $\overrightarrow{OP} = z\vec{k}$ ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យពីរចំណុច $A(2, 1, 3)$ និង $B(3, 5, 2)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។ សរសេរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}, \vec{j}$ និង $\vec{k}$ ។

ចម្លើយ តាមបម្រាប់គេបាន $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ ហើយ $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

ប្រតិបត្តិ 1. គេឱ្យបីចំណុច $A(-2, 3, -1)$, $B(4, -7, 5)$ និង $C(3, -6, 0)$ ។

សរសេរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ និង $\overrightarrow{OC}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}, \vec{j}$ និង $\vec{k}$ ។

2. សង់ចំណុច $P(2, 4, 5)$ និង $Q\left(-\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}\right)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

3. គេឱ្យបីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP} = -2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i}-7\vec{j}+5\vec{k}$ និង $\overrightarrow{OQ} = 3\vec{i}-6\vec{j}+\overrightarrow{OK}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច P, M និង Q ។

3.3 លក្ខណៈកូអរដោនេ

ក. បើ $P(x, y, z)$ និង $P'(x', y', z')$ ជាពីរចំណុចនៃលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។ គេបាន

- $P = P'$ សមមូល $x = x'$ និង $y = y'$ និង $z = z'$ ។
- $P \neq P'$ សមមូល $x \neq x'$ ឬ $y \neq y'$ ឬ $z \neq z'$ ។
- $\overrightarrow{P'P}$ មានកូអរដោនេ $(x-x', y-y', z-z')$ ។
- ចំណុចកណ្ដាលនៃ $\overrightarrow{PP'}$ មានកូអរដោនេ $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ ។

ខ. បើ $\vec{u} = (x, y, z)$ និង $\vec{u}' = (x', y', z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហប្រកបដោយគោល $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេបាន

- $\vec{u} = \vec{u}'$ សមមូល $x = x'$ និង $y = y'$ និង $z = z'$ ។
- $\vec{u} \neq \vec{u}'$ សមមូល $x \neq x'$ ឬ $y \neq y'$ ឬ $z \neq z'$ ។
- វ៉ិចទ័រ $(\vec{u}+\vec{u}')$ មានកូអរដោនេ $(x+x' , y+y' , z+z')$ ។
- វ៉ិចទ័រ $(\vec{u}-\vec{u}')$ មានកូអរដោនេ $(x-x' , y-y' , z-z')$ ។
- $\forall k \in \Re$ វ៉ិចទ័រ $k\vec{u}$ មានកូអរដោនេ (kx, ky, kz) ។
- $\forall (k, k') \in \Re^2$ វ៉ិចទ័រ $k\vec{u}+k'\vec{u}'$ មានកូអរដោនេ $(kx+k'x' , ky+k'y' , kz+k'z')$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេឱ្យ $\vec{a} = (1, -1, 5)$, $\vec{b} = (0, -1, 6)$ និង $\vec{c} = (3, -1, 3)$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល

ក. $\vec{u} = 2\vec{a}-3\vec{b}$

ខ. $\vec{v} = 3(\vec{a}-\vec{b})-4(\vec{b}-3\vec{c})$ ។

ចម្លើយ ក. $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ នាំឱ្យ គេបាន $\vec{u} = (2,\ -2,\ 10) - (0,\ -3,\ 18) = (2,\ 1,\ -8)$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ $\vec{u} = (2,\ 1,\ -8)$ ។

ខ. $\vec{v} = 3(\vec{a} - \vec{b}) - 4(\vec{b} - 3\vec{c})$ នាំឱ្យ គេបាន

$\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{b} + 12\vec{c} = 3\vec{a} - 7\vec{b} + 12\vec{c}$

$= (3,\ -3,\ 15) - (0,\ -7,\ 42) + (36,\ -12,\ 36) = (39,\ -8,\ 9)$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ $\vec{v} = (15,\ 0,\ -15)$ ។

លំហាត់គំរូ 2 1. ក្នុងលំហាប្រកបដោយតម្រុយ $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(-1,\ 2,\ 3)$, $B(1,\ -2,\ -1)$, $C(0,\ -3,\ -4)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាលនៃវ៉ិចទ័រទាំងបី ។

2. ត្រីកោណ ABC មួយមានកំពូល $A(2,\ -1,\ 4)$, $B(3,\ -2,\ 5)$, $C(-1,6,2)$ ។ ចូរសរសេរជាទម្រង់ $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ចំពោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA}$ ។

ចម្លើយ 1. ក. $\overrightarrow{AB} = (2,\ -4,\ -4)$, $\overrightarrow{BC} = (-1,\ -1,\ -3)$, $\overrightarrow{CA} = (-1,\ 5,\ 7)$ ។

ខ. $(0,\ 0,\ 1)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ។

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

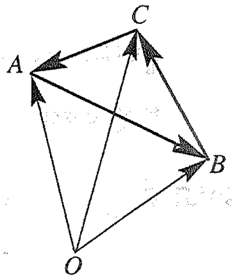
$= (3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}) - (2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (-\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}) - (3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}) = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$= (2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}) - (-\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}) = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$



ប្រតិបត្តិ 1. គេឱ្យ $\vec{a} = (2,\ -3,\ 0)$, $\vec{b} = (-3,\ 2,\ 5)$ និង $\vec{C} = (6,\ 0,\ -3)$ ។

រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល

ក. $\vec{u} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ ខ. $\vec{v} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(\vec{b} - 2\vec{c})$ ។

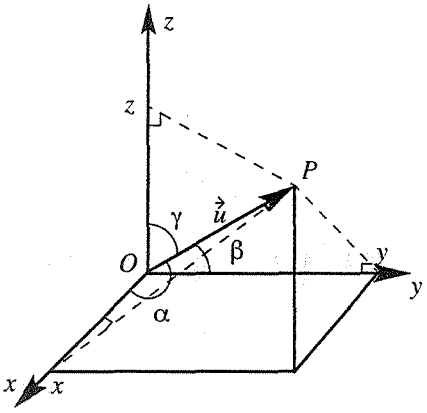
2. បើកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,\ y,\ z)$ និង $\vec{v} = (x',\ y',\ z')$ ខុសពីសូន្យ ។

បង្ហាញថា $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$ ។

3.4 ទិសដៅកូស៊ីនុស

គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x, y, z)$ មួយ និងចំណុច P នៅក្នុងលំហដែល $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ ។

យក α, β និង γ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយ OP ជាមួយនិងអ័ក្ស (Ox) អ័ក្ស (Oy) និងអ័ក្ស (Oz) រៀងគ្នា ដូចរូបខាងស្តាំ ។ តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង គេបាន :



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OP}|} \ , \quad x = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OP}|} \ , \quad y = |\overrightarrow{OP}|\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OP}|} \ , \quad z = |\overrightarrow{OP}|\cos\gamma$$

គេបាន

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$= |\overrightarrow{OP}|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \text{ នាំឱ្យ } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{|\overrightarrow{OP}|^2}{|\overrightarrow{OP}|^2} = 1$$

ដូចនេះ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

តម្លៃ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ និង $\cos\gamma$ នេះ គឺបញ្ជាក់ពី ទិសដៅកូស៊ីនុស នៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ ។

លំហាត់គំរូ 1. គេឱ្យកូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $(-2, 6, 9)$ ។

ក. រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{OP}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

2. គេឱ្យកូអរដោនេនៃចំណុច M គឺ $(2, 3, -6)$ ។

ក. រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{OM}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

ចម្លើយ ក. រកទិសដៅនៃកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{OP}$

ដោយ $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 9^2} = 11$

ដូចនេះ $x = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{-2}{11}$

$y = |\overrightarrow{OP}|\cos\beta$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{6}{11}$

$z = |\overrightarrow{OP}|\cos\gamma$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{9}{11}$

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

ដោយ $\cos\alpha = \dfrac{-2}{11}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{4}{121}$

$\cos\beta = \dfrac{6}{11}$, $\cos^2\beta = \dfrac{36}{121}$ និង $\cos\gamma = \dfrac{9}{11} \Rightarrow \cos^2\gamma = \dfrac{81}{121}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{121} + \frac{36}{121} + \frac{81}{121} = \frac{121}{121} = 1$$

ដូចនេះ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

2. ក. $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(2)^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7$ ដោយ $(2, 3, -6)$

ដូចនេះ $x = |\overrightarrow{OP}|\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{2}{7}$

$y = |\overrightarrow{OP}|\cos\beta$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{3}{7}$

$z = |\overrightarrow{OP}|\cos\gamma$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\overrightarrow{OP}|} = -\dfrac{6}{7}$

ខ. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{4}{49} + \dfrac{9}{49} + \dfrac{36}{49} = \dfrac{49}{49} = 1$

ដូចនេះ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. គេឱ្យកូអរដោនេនៃចំណុច Q គឺ $(3, 4, 5)$ ។

ក. រកទិសដៅនៃកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{OQ}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

2. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ។ ចូររក

ក. ទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

4. ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

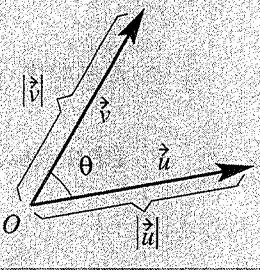
4.1 និយមន័យ

ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហ គឺជាចំនួនពិត k មួយដែលកំណត់ដោយ :

• $k = \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ បើ $\vec{u} = \vec{0}$ ឬ $\vec{v} = \vec{0}$ ។

• $k = \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ បើ $\vec{u}\neq\vec{0}$ និង $\vec{v}\neq\vec{0}$

ហើយ θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។



លំហាត់គំរូ

1. គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល $|\vec{u}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\vec{v}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\theta = 90^\circ$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។
គណនាផលគុណស្កាលែរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

2. គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល $|\vec{u}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ និង $\theta = 120^\circ$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ចម្លើយ

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\times|\vec{v}|\cos\theta$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos 90^\circ \quad \text{តែ} \quad \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0 = 0$$

2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\times|\vec{v}|\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\times\cos 120^\circ$

តែ $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \text{ ។}$$

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a ។

គណនាជាអនុគមន៍នៃ a ចំពោះផលគុណស្កាលែដូចខាងក្រោម :

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

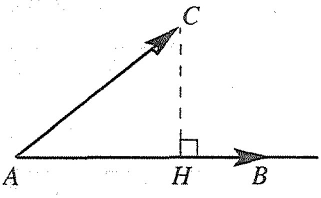
ខ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

4.2 លក្ខណៈ

ផលគុណស្កាលែក្នុងលំហមានលក្ខណៈដូចផលគុណស្កាលែក្នុងប្លង់ដែរ ។ យើងសន្មតលក្ខណៈទាំងនេះដោយមិនបាច់ស្រាយបញ្ជាក់ ។

- ចំពោះបីចំណុច A, B, C ដែល $A \neq B$ និង $A \neq C$ គេបាន
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

- បើ H ជាចំណោលកែងនៃ C លើ AB
គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AH}|$ ។
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AH}|$ បើ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AH}$ មានទិសដៅដូចគ្នា
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AH}|$ បើ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AH}$ មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា



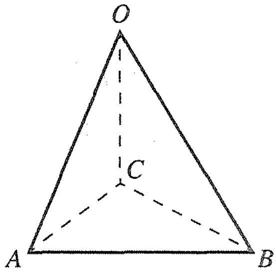
- ក. ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ គេបាន $\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$ ហៅថា
ការេស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ហើយ $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$
ហៅថាណមនៃ $\vec{u}$ ។

ខ. ចំពោះគូ (A, B) គេបាន $(\overrightarrow{AB})^2 = AB^2$ ហើយ $d(A, B) = AB = |\overrightarrow{AB}|$ ហៅថា ចំងាយពីចំណុច A ទៅ B ។

- ចំពោះគ្រប់ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និងចំនួនពិត m មួយ គេបាន
(1). $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
(2). $\vec{u}\perp\vec{v}$ សមមូល $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ $(\vec{u}\neq 0,\ \vec{v}\neq 0)$
(3). $(m\vec{u})\cdot\vec{v} = m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

- (1). $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ ហៅថា វិសមភាពកូស៊ី
(2). $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$ ហៅថា វិសមភាពត្រីកោណ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេឱ្យចតុមុខ $OABC$ មួយដែល $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} = m$ និង $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} = n$ ។
គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}$ ជាអនុគមន៍នៃ m និង n ។



ចម្លើយ តាមរូប គេបាន $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$$
$$= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$= n - m \text{ ។}$$

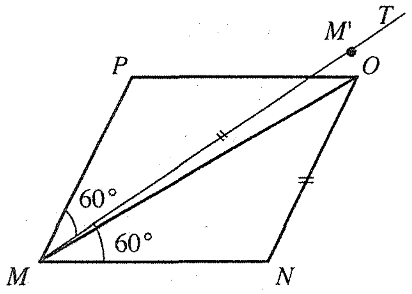
លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យការេ $MNOP$ ដែលជ្រុងមានរង្វាស់ស្មើ a និងកន្លះបន្ទាត់ MT ក្នុងលំហ ដែល $\angle NMT = \angle PMT = 60°$ ។

M' ជាចំណុចមួយនៅលើ MT' ដែល $MN' = a$ ។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MM'}$ និង $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MM'}$ ។

ខ. ទាញរក $\cos\angle OMT$ រួចរករង្វាស់មុំ $\angle OMT$ គិតជាដឺក្រេ ។

ចម្លើយ តាមរូប គេបាន



ក. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MM'} = |\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MM'}|\cos 60°$

$= a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MM'} = |\overrightarrow{MP}|\cdot|\overrightarrow{MM'}|\cos 60°$

$= a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MM'} = |\overrightarrow{MO}|\cdot|\overrightarrow{MM'}|\cos 0°$

$= a\cdot a = a^2$

ខ. ដោយ $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MM'} = |\overrightarrow{MO}|\cdot|\overrightarrow{MM'}|\cos\angle OMT$, $\cos\angle OMT = \dfrac{\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MM'}}{|\overrightarrow{MO}|\cdot|\overrightarrow{MM'}|}$

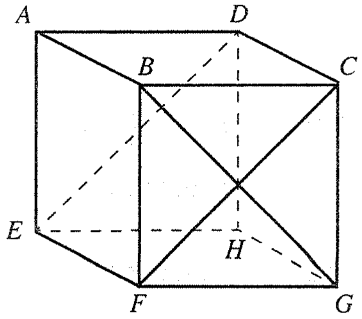
តែ $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MM'} = a^2$, $\overrightarrow{MM'} = a$ និង $|\overrightarrow{MO}| = a\sqrt{2}$

នោះគេបាន $\cos\angle OMT = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2}\cdot a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\cos\angle OMT = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ដោយ $\cos\angle OMT = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle OMT = 45°$ ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យគូបមួយមានជ្រុង a ដូចរូបខាងស្តាំ។ រកផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម :



ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

ខ. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$

ឃ. $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DE}$

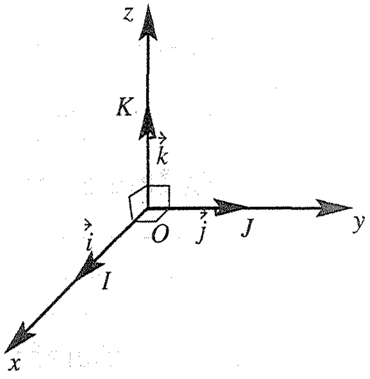
ង. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{FC}$

5. ផលគុណស្កាលែនិងការតាងកូអរដោនេ

5.1 គោលនិងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ក្នុងលំហ

ក. គោលអរតូណរម៉ាល់

$i)$. គេឱ្យមុំកែង xoy និងកន្លះបន្ទាត់ oz នៅក្នុងលំហដែលគល់ O អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ xoy ។ យើងតាង I, J, K ជាបីចំណុចស្ថិតនៅលើកន្លះបន្ទាត់ Ox, Oy, Oz រៀងគ្នា ដែល $OI = OJ = OK = 1$ ។



គេកំណត់ $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$

ដែល O, I, J, K មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

វ៉ិចទ័រ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ផ្តុំបានគោលនៃលំហមួយ ។

ម្យ៉ាងទៀត វ៉ិចទ័រទាំងបីនេះ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយអរតូកូណាល់គ្នាពីរៗ ។

និយមន័យ	គេហៅគោលអរតូណរម៉ាល់នៃវ៉ិចទ័រ គឺគ្រប់ត្រីធាតុ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែល $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = \lvert\vec{k}\rvert = 1$ និង $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

$ii)$. **កន្សោមវិភាគនៃផលគុណស្កាលែក្នុងគោលអរតូកូណាល់**

ឧទាហរណ៍ ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ មានវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$ និង $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k})\cdot(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

$$= xx'\vec{i}^2 + yy'\vec{j}^2 + zz'\vec{k}^2 + (xy' + yx')\vec{i}\cdot\vec{j} + (yz' + zy')\vec{j}\cdot\vec{k} + (zx' + xz')\vec{k}\cdot\vec{l}$$

ដោយ $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ និង $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{j} = 0$

ដូចនេះ $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ ។

ទ្រឹស្តីបទ	ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x, y, z)$ និង $\vec{v} = (x', y', z')$ គឺ $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ ។

14

សំគាល់ ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,\ y,\ z)$ ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{i} = x$, $\vec{u}\cdot\vec{j} = y$, $\vec{u}\cdot\vec{k} = z$ ។

ក្ដូវលៃ

ក. ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,\ y,\ x)$ និង $\vec{v} = (x',\ y',\ z')$ អរតូកូណាល់គ្នា លុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ បានន័យថា $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v} \text{ សមមូល } xx' + yy' + zz' = 0}$ ។

ខ. ស្កាលែនិងណម នៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,\ y,\ z)$ កំណត់ដោយ

$$\boxed{\vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ និង } |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

គ. ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\vec{u},\ \vec{v}$ និងមុំ θ (គិតជារ៉ាដ្យង់) កំណត់ដោយ

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta \text{ នាំឱ្យ } \cos = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \sqrt{x'^2 + y'^2}}}$$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា $|\vec{u}|,\ |\vec{v}|,\ \vec{u}\cdot\vec{v}$, $\cos\theta$ និង θ (ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$) នៃគូវ៉ិចទ័រខាងក្រោម ៖

ក. $\vec{u} = (3,\ -1,\ 2)$, $\vec{v} = (1,\ -1,\ -2)$

ខ. $\vec{u} = (-4,\ 0,\ 2)$, $\vec{v} = (2,\ 0,\ -1)$

ចម្លើយ ក. $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$ ។

ខ. $|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ ។

ក. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 1 + (-1)(-1) + (2)(-2) = 3 + 1 - 4 = 0$

ខ. $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-4)(2) + (0)(0) + (2)(-1) = -8 - 2 = -10$ ។

ក. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{0}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \dfrac{0}{\sqrt{84}} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$ ។

ខ. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-10}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \dfrac{-10}{\sqrt{100}} = -1 \Rightarrow \theta = \pi$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. រកផលគុណស្កាលែនៃគូវ៉ិចទ័រខាងក្រោម :

ក. $\vec{u} = (-2,\ 2,\ 3)$, $\vec{v} = (4,\ 5,\ 6)$ ខ. $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

គ. $\vec{a} = (1,\ 1,\ 2)$, $\vec{b} = (2,\ -1,\ 1)$ ឃ. $\vec{a} = (1,\ -1,\ 4)$, $\vec{b} = (2,\ 1,\ 2)$

2. បើ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ S គឺ $S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}$ ។

iii). លក្ខណៈផលគុណស្កាលែវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

$$(1)\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$(2)\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$(3)\ \vec{u}\cdot(m\vec{v}) = m(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$(4)\ (m\vec{u})\cdot\vec{v} = m(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

សម្រាយបញ្ជាក់

(1). $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

សន្មតថាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺ :

$\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$, $\vec{w} = (w_1,\ w_2,\ w_3)$

នោះ $\vec{v}+\vec{w} = (v_1+w_1,\ v_2+w_2,\ v_3+w_3)$

ដូចនេះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+u_3(v_3+w_3)$

$= (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)$

$= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

(2). $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2+(u_3+v_3)w_3$

$= (u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)+(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)$

$= \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

(3). $\vec{u}\cdot(m\vec{v}) = m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ដោយ $\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ នោះ $m\vec{v} = (mv_1,\ mv_2,\ mv_3)$

គេបាន $\vec{u}(m\vec{v}) = (u_1mv_1+u_2mv_2+u_3mv_3)$

$= [m(u_1v_1)+m(u_2v_2)+m(u_3v_3)]$

$= m(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$

$= m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

(4). ដូចគ្នាដែរ គេបាន $(m\vec{u})\cdot\vec{v} = m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

លំហាត់គំរូ 1 គេឱ្យ $\vec{u} = (1, -1, 2)$ និង $\vec{v} = (-1, -2, 1)$ ។

កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត l ដែល $\vec{u} - l\vec{v}$ និង $\vec{u}$ កែងគ្នា។

ចម្លើយ កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត l

ដោយ $\vec{u} - l\vec{v} = (1+l,\ 2l-1,\ 2-l)$ ។

តែ $\vec{u} - l\vec{v}$ និង $\vec{u}$ កែងគ្នា នោះ $(\vec{u} - l\vec{v})\cdot\vec{u} = 0$

នាំឱ្យ គេបាន $(\vec{u} - l\vec{v})\cdot\vec{u} = (1)(1+l) + (-1)(2l-1) + (2)(2-l)$

$= 1 + l - 2l + 1 + 2 - 2l = -3l + 4$

តែ $(\vec{u} - l\vec{v})\cdot\vec{u} = 0$, $-3l + 4 = 0 \Rightarrow l = \frac{4}{3}$

ដូចនេះ $l = \frac{4}{3}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ គេឱ្យបីចំណុច $A(1, 4, 2)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-2, 2, -1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$ ។

ចម្លើយ តាមបម្រាប់ គេបាន $\overrightarrow{AB} = (2-1,\ 1-4,\ 3-2) = (1, -3, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-2-1,\ 2-4,\ -1-2) = (-3, -2, -3)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = (-3)(1) + (-2)(-3) + (-3)(1) = -3 + 6 - 3 = 0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. គេឱ្យ $\vec{u} = (2, -1, 4)$ និង $\vec{v} = (-4, 5, 3)$ ។

   កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដែល $\vec{u} - k\vec{v}$ និង $\vec{u}$ កែងគ្នា។

2. គេឱ្យគូប $ABCD.EFGH$ ហើយចំណុច L, M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង EF, FG និង GC ។ ចូរកំណត់មុំ $\angle LMN = \theta$ ។

3. ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ គេឱ្យបីចំណុច $A(2, 1, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(0, -1, 4)$

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។

ខ. គណនាមុំ θ ជាមុំដែលផ្គុំឡើងដោយ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

ខ. តម្រុយអរតូណរម៉ាល់

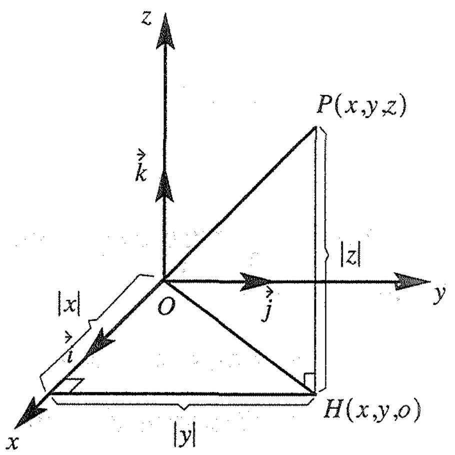
និយមន័យ គេហៅថាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ក្នុងលំហ គឺគ្រប់ចតុធាតុ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែល O ជាចំណុចមួយនៃលំហហៅថា **គល់** និង $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ហៅថា **គោលអរតូណរម៉ាល់** នៃលំហ ។

- បន្ទាត់ $(x'x)$ ដែលមានទិសដៅតាម $\vec{i}$ ហៅថា អ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$ ។
- បន្ទាត់ $(y'y)$ ដែលមានទិសដៅតាម $\vec{j}$ ហៅថា អ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$ ។
- បន្ទាត់ $(z'z)$ ដែលមានទិសដៅតាម $\vec{k}$ ហៅថា អ័ក្សកូត $(z'z)$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំណុច $M(x, y, z)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ នោះគេបានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ នៅក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i} = x$, $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j} = y$, $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{z} = z$ ។

គ. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចនៅក្នុងលំហ



គេឱ្យចំណុច $P(x, y, z)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

គូសបន្ទាត់ PH ឱ្យកែងទៅនឹងប្លង់ (xy) នោះកូអរដោនេនៃ H គឺ (x, y, o) ។

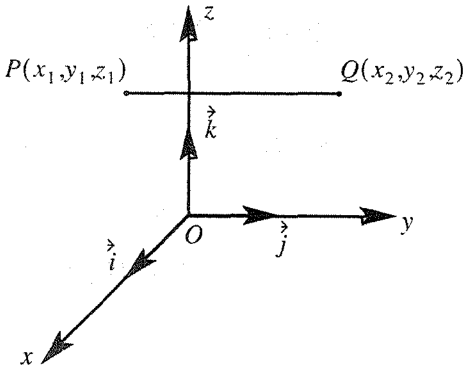
ដូចនេះ គេបាន $OH^2 = x^2 + y^2$ ។

ដោយ ΔPOH ជាត្រីកោណកែងត្រង់ H នោះគេបាន $OP^2 = OH^2 + PH^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ។

ដូចនេះ $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ។

ជាទូទៅ បើឱ្យពីរចំណុច $P(x_1, y_1, z_1)$ និង $Q(x_2, y_2, z_2)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{PQ}$ មានកូអរដោនេ $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ ។



គេបាន

$$PQ = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយរវាង P និង Q កំណត់ដោយ

$$d(P,\ Q) = PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$ ។

លំហាត់គំរូ រកចម្ងាយរវាងគូចំណុចខាងក្រោម ៖

ក. $Q(1,\ 2,\ 3)$, $P(3,\ 4,\ 5)$ ខ. $A(-1,\ -2,\ -5)$, $B(-3,\ -4,\ -5)$

ចម្លើយ ក. យក d ជាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $Q(1,\ 2,\ 3)$, $P(3,\ 4,\ 5)$ នោះគេបាន

$$d = (Q,\ P) = PQ = \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2} = \sqrt{4+4+4}$$

$$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$ ។

ខ. $$d(A,\ B) = AB = \sqrt{(-3+1)^2+(-4+2)^2+(-5+5)^2} = \sqrt{4+4+0}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ ។

លំហាត់គំរូ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ គេមានចំណុច $M(3,\ 1,\ 5)$, $N(3,\ 5,\ 1)$ និង $P(-1,\ 5,\ 5)$ ។

ក. គណនា MN, MP និង $\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MP}$ ។

ខ. តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះត្រីកោណ MNP ។

ចម្លើយ តាមបម្រាប់ គេបាន $MN = \sqrt{(3-3)^2+(5-1)^2+(1-5)^2} = \sqrt{32}$

$$MP = \sqrt{(-1-3)^2+(5-1)^2+(5-5)^2} = \sqrt{32}$$

ដោយ $\overrightarrow{MN} = (0,\ 4,\ -4)$ និង $\overrightarrow{MP} = (-4,\ 4,\ 0)$ នោះគេបាន

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = (0)(-4)+4\times4+(-4)(0) = 16$$

ដូចនេះ $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MP}\right|} = \frac{16}{\sqrt{32}\times\sqrt{32}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. រកចម្ងាយរវាងគូចំណុចខាងក្រោម ៖

ក. $A(3, -2, 4)$, $B(2, 0, 3)$ ខ. $A(0, 2, 3)$, $B(-4, 0, 1)$

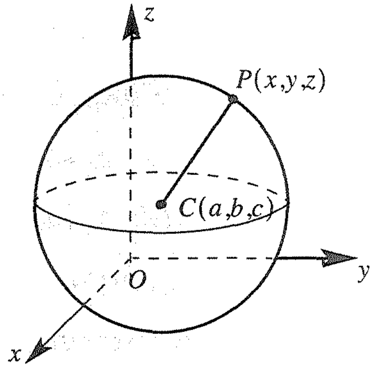
2. ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយ ៖ ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ កំណត់ចម្ងាយពីចំណុច $P(-2, 1, 3)$ ទៅបន្ទាត់ (Δ) ដែលកាត់តាមចំណុច $Q(-1, 2, 1)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ ។

6. សមីការនៃស្វ៊ែ

6.1 និយមន័យ

សំណុំនៃចំណុចដែលមានចម្ងាយថេរ r ពីចំណុចនឹង C ហៅថា **ស្វ៊ែ** ដែលមានផ្ចិត C និងកាំ r ។

បើ (a, b, c) ជាកូអរដោនេនៃផ្ចិត C ហើយលក្ខខណ្ឌ $CP = r$ ។



យក $P(x, y, z)$ ជាចំណុចស្ថិតនៅលើផ្ទៃស្វ៊ែ ។

ដោយ $C(a, b, c)$ និង $P(x, y, z)$ នោះ

តាមរូបមន្តចម្ងាយរវាងពីរចំណុចនៅក្នុងលំហ គេបាន

$CP^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ ។

សមីការនេះហៅថា **សមីការនៃស្វ៊ែ** ។

ដូចនេះ គេបាន

សមីការនៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតត្រង់ (a, b, c) និងកាំ r គឺ $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេឱ្យចំណុច $A(5, -2, 3)$ ជាចុងម្ខាងនៃអង្កត់ផ្ចិតស្វ៊ែនិងចំណុច $B(0, 4, -3)$ ជាចុងម្ខាងទៀតនៃអង្កត់ផ្ចិតស្វ៊ែ ។ រកសមីការនៃស្វ៊ែនេះ ។

ចម្លើយ តាមរូបមន្តចំណុចកណ្ដាល នោះគេបានផ្ចិតនៃស្វ៊ែគឺ ៖

$$\left(\frac{5+0}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, 0\right)$$

តាមរូបមន្តចម្ងាយ នោះគេបានកាំ r នៃស្វ៊ែគឺ ៖

$$r = \sqrt{\left(0-\frac{5}{2}\right)^2+(4-1)^2+(-3-0)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2}$$

ដូចនេះ សមីការនៃស្វ៊ែគឺ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 = \frac{97}{4}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 1. បង្ហាញសមីការ $x^2+y^2+z^2-6x+8z = 0$ ជាសមីការនៃស្វ៊ែ រួចរកផ្ចិតនិងកាំ r ។

2. រកសមីការស្វ៊ែ រួចរកផ្ចិតនិងកាំនៃស្វ៊ែ $x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z+1 = 0$

ចម្លើយ 1. ដោយសមីការ $x^2+y^2+z^2-6x+8z = 0$ អាចបំលែងជា

$$(x^2-6x+9)+y^2+(z^2+8z+16) = 9+16$$

$$(x-3)^2+y^2+(z+4)^2 = 5^2$$

នោះគេបានសមីការ $(x-3)^2+y^2+(z+4)^2 = 5^2$ ជាសមីការនៃស្វ៊ែ ដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(3, 0, -4)$ និងមានកាំ $r = 5$ ។

2. $x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z+1 = 0$

បំលែងសមីការនេះ គេបាន

$$(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9+(z^2+8z+16)-16+1 = 0$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)+(z^2+8z+16) = 25$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2 = 5^2$$

សមីការនេះជាសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(1, -3, -4)$ និងមានកាំស្មើនឹង 5 ។

ប្រតិបត្តិ 1 រកសមីការនៃស្វ៊ែខាងក្រោម ៖

ក. ដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(2, 0, -3)$ និងមានកាំស្មើ 6 ។

ខ. ដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(4, -3, 5)$ ហើយប៉ះទៅនឹងប្លង់ (yz) ។

ប្រតិបត្តិ 2 រកសមីការស្វ៊ែ រួចរកផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែ

ក. $x^2+y^2+z^2+18x-10z+91 = 0$

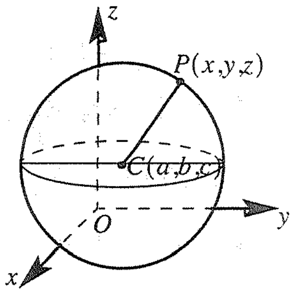
ខ. $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z = 11$

គ. $9x^2+9y^2+9z^2-6x+18y+1 = 0$

ឃ. $4x^2+4y^2+4z^2-4x-32y+8z+33 = 0$

6.2 វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនិងខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ

ក. វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែ



និយមន័យ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែ គឺជាសំណុំចំណុចដែលចម្ងាយពីផ្ចិតតូចជាងកាំ ។

ដូចនេះ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតត្រង់ (a, b, c) និងមានកាំ r គឺ : $\{(x,y,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2\}$ ។

ខ. វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ

និយមន័យ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ គឺជាសំណុំចំណុចដែលចម្ងាយពីផ្ចិតធំជាងកាំ ។

ដូចនេះ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ ដែលមានផ្ចិតត្រង់ (a, b, c) និងមានកាំ r គឺ : $\{(x,y,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2\}$ ។

លំហាត់គំរូ សរសេរវិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនិងផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ ដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់ $O(0, 0, 0)$ និងកាំស្មើ 4 ។

ចម្លើយ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែ

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2<4^2$

$x^2+y^2+z^2<4^2$

វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2>4^2$

$x^2+y^2+z^2>4^2$

ប្រតិបត្តិ សរសេរវិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនិងខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ ដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់ $(2, 1, -3)$ និងកាំស្មើ 1 និងស្វ៊ែដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(2, 1, -3)$ និងកាំស្មើ 4 ។

លំហាត់

1. គេឱ្យ $\vec{u} = (4, -2, 5)$ និង $\vec{v} = (7, 9, -8)$ ។

   រកវ៉ិចទ័រ $\vec{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖

   ក. $2\vec{u} + \vec{x} = 3\vec{v}$ ខ. $4\vec{x} - \vec{u} = 3\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{x}$

2. គេឱ្យ $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 1)$ និង $\vec{p} = (5, 6, 7)$ ។

   បង្ហាញ $\vec{p}$ ជាទម្រង់ $\vec{p} = l\vec{u} + m\vec{v} + n\vec{w}$ ។

3. រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម ៖

   ក. $\vec{u} = (3, -4, 5)$ ខ. $\vec{v} = (-3, 2, 2\sqrt{3})$ ។

4. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (2, -1, 5)$, $\vec{v} = (3x, 5, 4y-2)$ និង $\vec{w} = (z-1, 2, z+1)$

   ក. រកតម្លៃ x និង y ដែល $\vec{u} // \vec{v}$ ។

   ខ. រកតម្លៃ z ដែល $\vec{u} \perp \vec{w}$ ។

5. រកតម្លៃ x, y និង z ដែលវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x, 4, 6)$, $\vec{v} = (2, y, 6)$ និង $\vec{w} = (2, 4, z)$ កែងគ្នា ។

6. គេឱ្យ $\vec{u} = (1, 2, -3)$ និង $\vec{v} = (2, -1, -2)$ និង $\vec{w} = (1, -1, 1)$ ។

   បើវ៉ិចទ័រ $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ប្រសព្វទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ហើយដែល $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ អរតូកូណាល់គ្នា ។ រក $x_1 : x_2 : x_3$ ដែល $\vec{x} \neq \vec{0}$ ។

7. គេឱ្យ $\vec{u} = (2, -2, 1)$ និង $\vec{v} = (2, 3, -4)$

   តាង $\vec{v} - k\vec{u} = \vec{w}$ ដែល k ជាចំនួនពិត ។

   បើ $\vec{w}$ និង $\vec{u}$ កែងគ្នា ។ កំណត់តម្លៃ k និង $\vec{w}$ ។

8. គេឱ្យចំណុច $A(0, 3, 0)$, $B(0, 1, -2)$ និង $C(2, 3, -2)$ ។

   ក. តើ ΔABC ជាប្រភេទត្រីកោណអ្វី ?

   ខ. រកសមីការនៃស្វ៊ែដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C និងចំណុចគល់ ។

9. រកសមីការនៃស្វ៊ែខាងក្រោម :

   ក. ស្វ៊ែដែលមានអង្កត់ផ្ចិតដែលភ្ជាប់ពីរចំណុច $(-2, 1, 5)$ និង $4, -3, -1$ ។

   ខ. ស្វ៊ែដែលកាត់តាមចំណុច $(-5, 1, 4)$ ហើយប៉ះទៅនឹងប្លង់កូអរដោនេទាំងបី ។

10. តើសំណុំចំណុចនៃ P ជាប្លង់អ្វី ? ហើយរកសមីការនៃប្លង់នោះ បើ

ក. ចំណុច P ជាចំណុចដែលផលធៀបរបស់វាមានចម្ងាយពីចំណុច $A(-1, 0, 0)$ និង $B(2, 0, 0)$ គឺ $2 : 1$ ។

ខ. ចំណុច P ដែលផលបូកការេនៃចម្ងាយរបស់វាពីចំណុចពីរ $A(1, 2, 0)$ និង $B(-1, 4, 2)$ គឺ 38 ។

11. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ជាគោលអរតូណរម៉ាល់មួយ ។ ចូរគណនា $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{w}\cdot\vec{u}$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\vec{u} = (1+\sqrt{2})\vec{i} + \sqrt{3}\vec{i}$, $\vec{v} = (1-\sqrt{2})\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{w} = \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$ ។

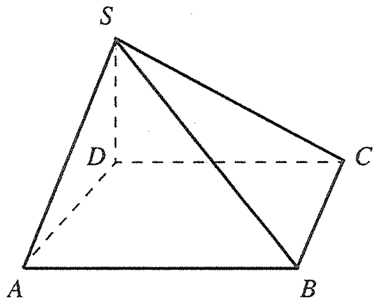
ខ. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{6}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j} + \frac{2}{5}\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$ ។

12. $SABCD$ ជាពីរ៉ាមីតដែលមានបាតជាការេ មានកំពូល S និងទ្រនុងមានរង្វាស់ a ស្មើគ្នាទាំងអស់ ។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោមនេះជាអនុគមន៍នៃ a ។

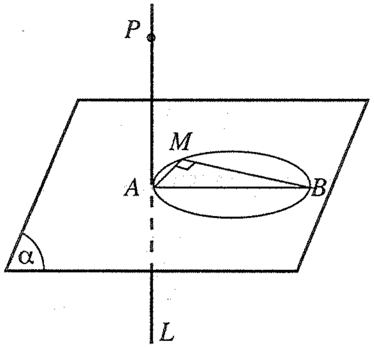
ក. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$

ខ. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$

គ. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$



13. គេឱ្យរង្វង់ (C) អង្កត់ផ្ចិត AB នៅក្នុងប្លង់ α ត្រង់ A ។
បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $M \in (C)$ គេបាន $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ ។



មេរៀនទី 2

សមីការបន្ទាត់ និងសមីការប្លង់ក្នុងលំហ

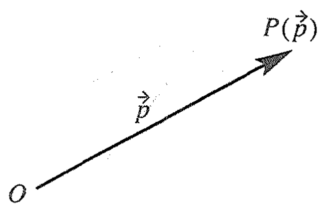
1. វ៉ិចទ័រទីតាំង

វត្ថុបំណង

- កំណត់វ៉ិចទ័រទីតាំងក្នុងលំហ
- កំណត់សមីការនៃប្លង់
- កំណត់សមីការនៃស្វ៊ែរ
- កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ក្នុងលំហ
- គណនាចម្ងាយរវាងចំណុចនិងប្លង់ក្នុងលំហ ។

1.1 និយមន័យ

គេមានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ មួយនៅក្នុងលំហ ។ គេកំណត់ P ជាចំណុចចល័ត ហើយ O ជាចំណុចនឹង ។



គេថាវ៉ិចទ័រ $\vec{p}$ ជា វ៉ិចទ័រទីតាំង នៃចំណុច P ដែលចំណុច O ជាចំណុចគល់ ។
គេកំណត់វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច P គឺ $\vec{p}$ ហើយគេសរសេរ $P(\vec{p})$ ។

1.2 វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចចែកក្នុងនិងចែកក្រៅអង្កត់

គេឱ្យពីរចំណុច $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ ក្នុងលំហនិងវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច C ហើយ C ចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m : n$ និងវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{d}$ នៃចំណុច D ហើយ D ចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m : n$ ។

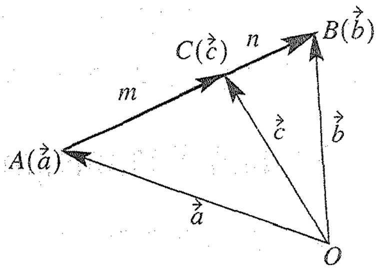
តាមផលធៀបទាំងពីរ គេបានរូបមន្តខាងក្រោម :

វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m : n$ គឺ $\vec{c} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$

វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{d}$ នៃចំណុច D ដែលចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m : n$ គឺ $\vec{d} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$

សម្រាយបញ្ជាក់

- ស្រាយថា វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c} = \dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ បើគេតាង $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{AB}$ ជាវ៉ិចទ័រ



ទីតាំង នោះ $\overrightarrow{AC} = \vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a}$

តាមរូបមន្ត គេបាន $\overrightarrow{AC} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

ដូចនេះ គេបាន : $\vec{c}-\vec{a} = \dfrac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$

$\vec{c} = \dfrac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})+\vec{a}$

$\vec{c} = \dfrac{m\vec{b}-m\vec{a}+m\vec{a}+n\vec{a}}{m+n}$ នាំឱ្យ គេបាន

$\vec{c} = \dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

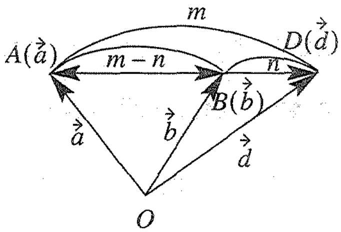
- ស្រាយថាវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{d} = \dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

បើគេតាង $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំង នោះ $\overrightarrow{AD} = \vec{d}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a}$

តាមរូបគេបាន : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$

ដូចនេះ $\vec{d}-\vec{a} = \dfrac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})$, $\vec{d} = \dfrac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})+\vec{a}$

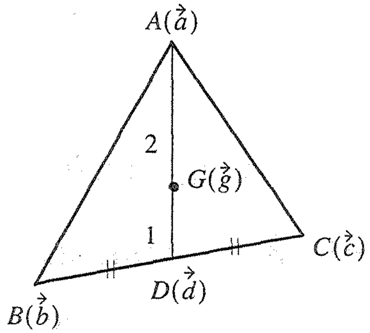
$\vec{d} = \dfrac{m\vec{b}-m\vec{a}+m\vec{a}-n\vec{a}}{m-n} = \dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$



លំហាត់គំរូ មានបីចំណុច $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ និង $C(\vec{c})$ ជាចំណុចនៅត្រង់កំពូលត្រីកោណ ABC ។ រកវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{g}$ នៃចំណុច G ដែល G ជាទីប្រជុំទម្ងន់របស់ ΔABC ។

ចម្លើយ តាង $D(\vec{d})$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ នោះ គេបានវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{d} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

ដោយ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ នោះ G ចែកអង្កត់ $[AD]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $2:1$ នោះគេបានវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{g}$ នៃចំណុច G គឺ



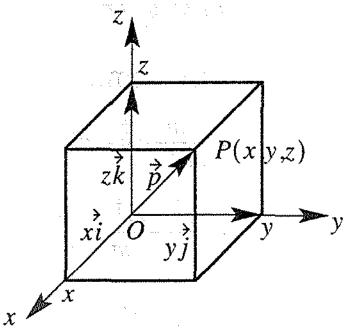
$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3} = \frac{\vec{a}+2\times\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃទីប្រជុំទម្ងន់ G គឺ $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ។

PROEUS DARA

ប្រតិបត្តិ មានបួនចំណុច $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ និង $D(\vec{d})$ ជាចំណុចកំពូលរបស់ចតុមុខនិយ័ត $ABCD$ ។ ចំណុច G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ BCD ។ រកវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$ នៃចំណុច P ដែល P ចែក $[AG]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $3 : 1$ ។

1.3 វ៉ិចទ័រទីតាំងនិងការតាងកូអរដោនេ



គេឱ្យកូអរដោនេអាប់ស៊ីស ដែលមាន O ជាចំណុចគល់នៃវ៉ិចទ័រទីតាំង ។

បើ $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច $P(x, y, z)$ នោះតាមរូប គេបានវ៉ិចទ័រ $\vec{p}$ គឺ :

$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ។

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$ គឺ (x, y, z) ដែលគេកំណត់សរសេរ $\vec{p} = (x, y, z)$ ដែលមានO ជាចំណុចគល់ ។

កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p} = (x, y, z)$ ក៏ជាកូអរដោនេនៃចំណុច P ដែរ ។

លំហាត់គំរូ រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់ G របស់ត្រីកោណ ABC ដែលកំពូលរបស់ត្រីកោណនេះមានកូអរដោនេគឺ $A(-1, 2, 3)$, $B(1, -2, -1)$ និង $C(0, -3, -4)$ ។

ចម្លើយ តាង $\vec{a}, \vec{b}$ និង $\vec{c}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច A, B និង C រៀងគ្នា។ នោះគេបាន $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, -1)$ និង $\vec{c} = (0, -3, -4)$ ។

តាង $\vec{g} = (x, y, z)$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច G ដែល G ជាទីប្រជុំទម្ងន់របស់ត្រីកោណ ABC ។ ដូចនេះ គេបានវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{g}$ នៃទីប្រជុំទម្ងន់ត្រីកោណដែលមានកំពូល A, B និង C គឺ

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{(-1, 2, 3)+(1, -2, -1)+(0, -3, -4)}{3}$$

$$= \frac{(0, -3, -2)}{3} = \left(0, -1, -\frac{2}{3}\right)$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ G គឺ $\left(0, -1, -\frac{2}{3}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់ G របស់ត្រីកោណដែលកំពូលរបស់ត្រីកោណ គឺ

ក. $A(6, -2, 3)$, $B(-1, 6, 3)$ និង $C(1, 5, -3)$ ។

ខ. $P(2, 3, 6)$, $Q(1, 2, -3)$ និង $R(4, 2, -5)$ ។

1.4 អនុវត្តន៍វ៉ិចទ័រទីតាំងលើរូបធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យបួនចំណុច O, A, B និង C នៅក្នុងលំហ ។

បង្ហាញថា បើ $[OB]\perp[CA]$ និង $[OC]\perp[AB]$ នោះ $[OA]\perp[BC]$ ។

ចម្លើយ យក O ជាគល់ ហើយ $\vec{a}, \vec{b}$ និង $\vec{c}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃបីចំណុច A, B និង C ។

ដោយ $[OB]\perp[CA]$ នោះ $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = 0$ ។

ដូចនេះ $\vec{b}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{c}$ (1)

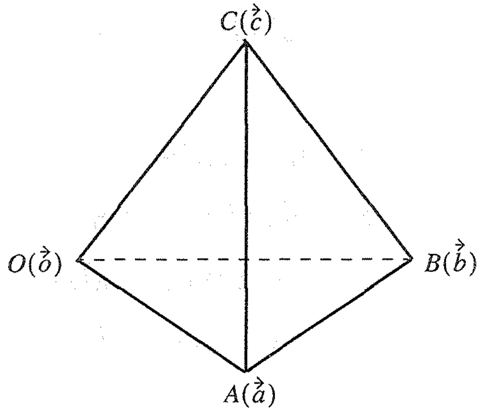
ដោយ $[OC]\perp[AB]$ នោះ $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$ ។

ដូចនេះ $\vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\vec{b}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a}$ ។

នាំឱ្យ $(\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a} = 0$ ។

ដូចនេះ $[OA]\perp[BC]$ ។



លំហាត់គំរូ គេឱ្យចតុមុខនិយ័ត $ABCD$ មួយក្នុងលំហ ។

គេតាង $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ ។ បង្ហាញថា $[AB]\perp[CD]$ ។

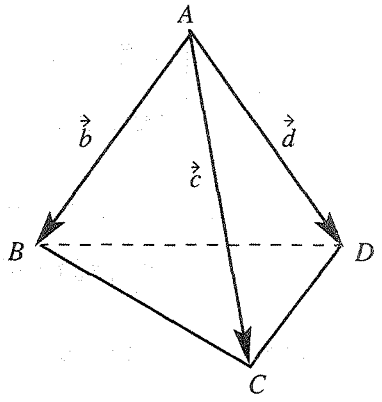
ចម្លើយ តាមរូបគេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c}) = \vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

ដោយ $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$ ហើយមុំផ្គុំឡើងដោយ $\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ស្មើ $60°$ និងមុំផ្គុំឡើងដោយ $\vec{b}$ និង $\vec{d}$ ស្មើ $60°$

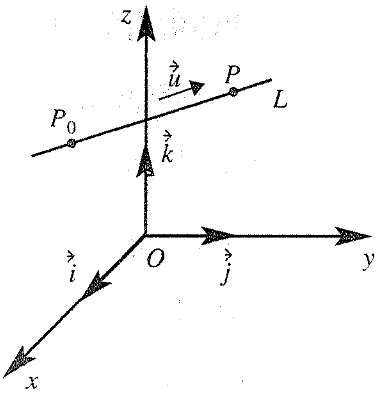
នោះគេបាន $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ នោះ

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

នាំឱ្យ $[OA]\perp[BC]$ ។



ប្រតិបត្តិ បង្ហាញថា បើបួនចំណុច A, B, C និង D នៅក្នុងលំហ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB^2+CD^2 = AC^2+BD^2$ នោះ $[AD]\perp[BC]$ ។



2. សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

គេឱ្យបន្ទាត់ L មួយដែលកំណត់ដោយ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ ដែល $(\vec{u} \neq \vec{0})$ ។

តាង P ជាចំណុចផ្លាស់ទីលើ L ដែល $\overrightarrow{P_oP} \,//\, \vec{u}$ ។

ដូចនេះមានចំនួនពិត t មួយដែល $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{u}$, $(t\in\Re)$ ។

តាង (x, y, z) ជាកូអរដោនេនៃចំណុច P នោះគេបានកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{P_0P}$ គឺ $(x-x_0 \ , y-y_0 \ , z-z_0)$ ហើយកូអរដោនេនៃ $t\vec{u}$ គឺ (ta, tb, tc) ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{u}$ នាំឱ្យ $\boxed{\begin{cases} x-x_0 = at \\ y-y_0 = bt \\ z-z_0 = ct \end{cases}}$ (1)

ចំពោះ $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ ហើយដោយបំបាត់ t ពី (1) គេបាន

$\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_2}{c}$ ។

ដូចនេះ

សមីការបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ គឺ $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ ។

ទំនាក់ទំនង (1) ហៅថាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលមាន t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $\vec{u} = (a, b, c)$ ហៅថា **វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស** នៃបន្ទាត់ L ។

លំហាត់គំរូ

1. រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $(-2, 3, 4)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសដូចខាងក្រោម ៖

   ក. $(-3, 2, 4)$ ខ. $(1, 4, 5)$ ។

2. រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $(-2, 3, 5)$ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $x-1 = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{3-z}{5}$ ។

ចម្លើយ

1. តាមរូបមន្ត សមីការបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ គឺ $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ នោះគេបាន

   ក. សមីការ L កាត់តាមចំណុច $(-2, 3, 4)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $(-3, 2, 4)$ គឺ $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{4}$ ឬ $\frac{-x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{4}$

   ខ. សមីការបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $(-2, 3, 4)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $(1, 4, 5)$ គឺ $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ ឬ $x+1 = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$

2. ដោយសមីការបន្ទាត់ L ស្របនឹងបន្ទាត់ $x-1 = \frac{y-4}{2} = \frac{3-z}{5}$ នោះ L ក៏ស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសបន្ទាត់នេះដែរ ។
   ដូចនេះ វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់ $x-1 = \frac{y-4}{2} = \frac{3-z}{5}$ គឺ $(1, 2, 5)$ ។

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ L គឺ $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{5}$ ឬ $x+2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{5}$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. រកសមីការនៃបន្ទាត់ d ដែលកាត់តាមចំណុច $(3, 4, -2)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសដូចខាងក្រោម ៖

   ក. $(-2, 1, 3)$ ខ. $(5, 1, 4)$ គ. $(3, 4, 0)$ ឃ. $(2, 0, 0)$

2. រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $(5, -2, 3)$ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $x-2 = \frac{y-5}{3} = \frac{4-z}{6}$ ។

3. ក. គេឱ្យចំណុច $A(-1, 3, 2)$ និង $B(2, 1, -2)$ ។
   - រកសមីការនៃបន្ទាត់ (AB)
   - គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AB) និងប្លង់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{k}, \vec{i})$ និង $(O, \vec{i}, \vec{k})$ ។

   ខ. បន្ទាត់ L មួយមានសមីការ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = z+1$ ។
   - កំណត់ចំណុចមួយនៃ L និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់វា
   - តើចំណុចខាងក្រោមនេះស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ L ឬទេ ?

   $M\left(-4, \frac{16}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $M_1\left(\frac{11}{2}, \frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ ។

5

3. សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច

គេមានពីរចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ និង $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ នៅក្នុងលំហ ។

តាមពីរចំណុចនេះ គេបានកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{P_0P_1}$ គឺ $(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$ ។

ពេលដែល $x_1 \neq x_0$, $y_1 \neq y_0$, $z_1 \neq z_0$ នោះគេបានសមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ និង $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ គឺ $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$ ។

ដូចនេះ

សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ និង $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ គឺ $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$

លំហាត់គំរូ 1 រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមគូចំណុចខាងក្រោម ៖

ក. $(1,\ -2,\ -3)$, $(-4,\ 5,\ -6)$

ខ. $(3,\ 0,\ -2)$, $(-4,\ -7,\ -5)$

គ. $(-3,\ -4,\ 2)$, $(-5,\ -3,\ 4)$

ឃ. $(2,\ -5,\ -3)$, $(4,\ 0,\ -1)$

ចម្លើយ តាមរូបមន្ត សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ និង $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ គឺ $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$ នោះគេបាន

ក. $\dfrac{x-1}{-4-1} = \dfrac{y+2}{5+2} = \dfrac{z+3}{-6+3}$ ឬ $\dfrac{1-x}{5} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{-z-3}{3}$

ខ. $\dfrac{x-3}{-4-3} = \dfrac{y-0}{-7-0} = \dfrac{z+2}{-5+2}$ ឬ $\dfrac{3-x}{7} = \dfrac{-y}{7} = \dfrac{-z-2}{3}$

គ. $\dfrac{x+3}{-5+3} = \dfrac{y+4}{-3+4} = \dfrac{z-2}{4-2}$ ឬ $\dfrac{-x-3}{2} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-2}{2}$

ឃ. $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y+5}{5} = \dfrac{z+3}{-1+3}$ ឬ $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{5} = \dfrac{z+3}{2}$

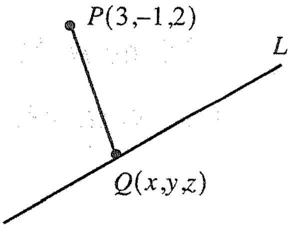
លំហាត់គំរូ 2 គេមានបន្ទាត់ $L : \dfrac{x}{3} = y+6 = \dfrac{z-2}{2}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច Q នៅលើ L ដែលមានចម្ងាយពី $[PQ]$ ទៅចំណុច $P(3,\ -1,\ 2)$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

ចម្លើយ យក $(x,\ y,\ z)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច Q នោះគេបាន :

$$PQ^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \qquad (1)$$

ដោយចំណុច Q នៅលើ L នោះ

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t-6 \\ z = 2t+2 \end{cases} \quad (2)$$



ជំនួស (2) ទៅក្នុង (1) គេបាន

$$PQ^2 = (3t-3)^2 + (t-5)^2 + 4t$$

$$= 14t^2 - 28t + 34 = 14(t-1)^2 + 20$$

ដូចនេះ PQ^2 អប្បបរមា ចំពោះ $t = 1$ ។

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច Q ពេលដែល PQ អប្បបរមាគឺ $(3, -5, 4)$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែល :

ក. កាត់តាម $A(-1, 2, 3)$ និង $B(4, -5, 6)$

ខ. កាត់តាម $A(-3, 0, 2)$ និង $B(4, 7, 5)$

គ. កាត់តាម $A(3, 4, -2)$ និង $B(5, 3, -2)$

ឃ. កាត់តាម $A(-2, 5, 5)$ និង $B(-2, 0, 3)$

2. រកសមីការបន្ទាត់ L ដែល

ក. កាត់តាម $A(1, 2, -1)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (-2, 3, 2)$ ។

ខ. កាត់តាមចំណុច $A(-2, 1, 3)$ និង $B(-1, 2, 1)$ ។

3. គេមានបន្ទាត់ $L : \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{2} = z+1$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច P នៅលើ L ដែលចម្ងាយពី PQ ទៅចំណុច $Q(-1, 3, 2)$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

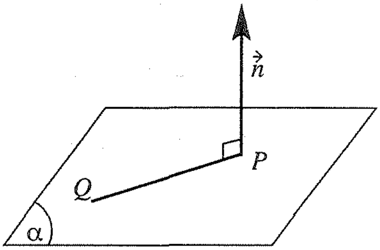
4. សមីការប្លង់ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់

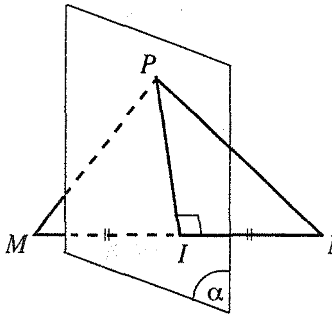
4.1 វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់

- វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α) គឺគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ មិនសូន្យ ហើយមានទិសអរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (α) ។

- គេមានចំណុច P មួយ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ មិនសូន្យមួយ ។

សំណុំចំណុច Q នៃលំហដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$ គឺជាប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច P និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។





ឧទាហរណ៍ គេមានអង្កត់ $[MN]$ មួយ និង I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[MN]$ ។ សំណុំចំណុច P ដែលស្ថិតនៅស្មើចម្ងាយពីចំណុច M និង N ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[MN]$ ហើយជាប្លង់ដែលកាត់តាម I និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{MN}$

4.2 សមីការប្លង់កំណត់ដោយចំណុចមួយនិងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មួយ

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យចំណុច $P(1, 4, 2)$ និង $\vec{n} = (3, 2, 4)$ ។ $Q(x, y, z)$ ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ (α) ។

ក. ចូររកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{PQ}$ ។

ខ. ដោយប្រើទំនាក់ទំនង $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$ បង្ហាញថា $Q \in (\alpha)$ លុះត្រាតែ $3x + 2y + 4z - 19 = 0$ ។

គ. ករណីទូទៅនៃប្លង់ (α) កំណត់ដោយ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ ដែល $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ ។ បង្ហាញថាចំណុច $Q(x, y, z) \in (\alpha)$ លុះត្រាតែ $ax + by + cz + d = 0$ ដែល d ជាចំនួនត្រូវកំណត់ ។

ចម្លើយ ក. $\overrightarrow{PQ}$ មានកូអរដោនេ $(x-1, y-4, z-2)$ ។

ខ. $Q \in (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$ ឬ $Q \in (\alpha) \Leftrightarrow [3(x-1) + 2(y-4) + 4(z-2)] = 0$

$Q \in (\alpha) \Leftrightarrow 3x - 3 + 2y - 8 + 4z - 8 = 0$ ឬ $3x + 2y + 4z - 19 = 0$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះ ហៅថាសមីការនៃប្លង់ (α) ។

គ. $Q \in (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$

តែ $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_o, z - z_0)$ និង $\vec{n} = (a, b, c)$

ដូចនេះ $Q \in (\alpha) \Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$ ។

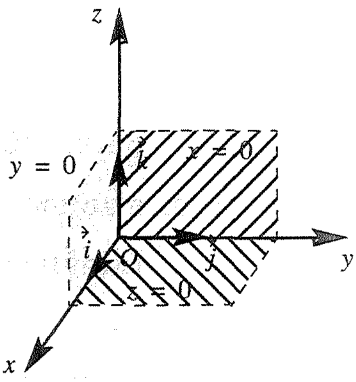
$Q \in (\alpha) \Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$ ។

តាង $d = (ax_0 + by_0 + cz_0)$ នោះគេបានសមីការនៃប្លង់ (α) គឺ $ax + by + cz + d = 0$ ។

សន្និដ្ឋាន គេមានតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ ។

- សមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយចំណុច $P(x_0, y_0, z_0)$ និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ មានរាង $ax + by + cz + d = 0$
- សំណុំចំណុច $Q(x, y, z)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $ax + by + cz + d = 0$ (ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ហើយ a, b, c មិនសូន្យព្រមគ្នា) គឺជាប្លង់ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ ។

ករណីពិសេស



បើ $z = 0$ ជាសមីការប្លង់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

បើ $x = 0$ ជាសមីការប្លង់ $(O, \vec{j}, \vec{k})$

បើ $y = 0$ ជាសមីការប្លង់ $(O, \vec{i}, \vec{k})$

លំហាត់គំរូ 1 ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឱ្យចំណុច $P(2, -1, 4)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (1, -2, 3)$ ។

រកសមីការនៃប្លង់ (α) ដែលកាត់តាម P និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{u}$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី 1: សមីការនៃប្លង់ (α) មានរាង $ax + by + cz + d = 0$ ដែល (a, b, c) ជាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ។ ដោយកូអរដោនេនៃ $\vec{u}$ គឺ $(1, -2, 3)$ នោះគេបាន

$a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ នាំឱ្យ $x - 2y + 3z + d = 0$ ។

ដោយ $P \in (\alpha)$ គេបាន $2 - (2)(-1) + 3(4) + d = 0$, $d = -16$ ។

ដូចនេះ សមីការនៃប្លង់ (α) គឺ $x - 2y + 3z - 16 = 0$ ។

របៀបទី 2 : (α) ជាសំណុំចំណុច $Q(x, y, z)$ ដែល $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{PQ}$ មានកូអរដោនេ $(x - 2, y + 1, z - 4)$ នោះគេបាន

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = (x - 2)1 + (y + 1)(-2) + (z - 4)3 = x - 2y + 3z - 16$

ដូចនេះ $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ សមមូល $x - 2y + 3z - 16 = 0$ ជាសមីការនៃប្លង់ (α) ។

លំហាត់គំរូ2 1. ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឱ្យចំណុច $A(6,\ 4,\ 2)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (1,\ 2,\ -3)$ ។ ចូរកំណត់សមីការនៃប្លង់ (α) ដែលកាត់តាម A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។

2. ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឱ្យពីរចំណុច $A(4,\ 3,\ 2)$ និង $B(2,\ -4,\ 6)$ ។ កំណត់សមីការនៃប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយអរតូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

ចម្លើយ 1. តាមបម្រាប់ គេបាន $(x-6)+2(y-4)-3(z-2) = 0$

$$x-6+2y-8-3z+6 = 0$$

$$x+2y-3z-8 = 0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (α) គឺ $x+2y-3z-8 = 0$

2. តាមបម្រាប់ គេបាន $a(x-4)+b(y-3)+c(z-2) = 0$ (1)

តែវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB} = (2-1,\ -4-3,\ 6-2) = (1,\ -7,\ 4)$ នោះគេបាន

$a = 1$, $b = -7$, $c = 4$, (1) អាចសរសេរជា

$(x-4)-7(y-3)+4(z-2) = 0$

$x-4-7y+21+4z-8 = 0$

$x-7y+4z+13 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (α) គឺ $x-7y+4z+13 = 0$ ។

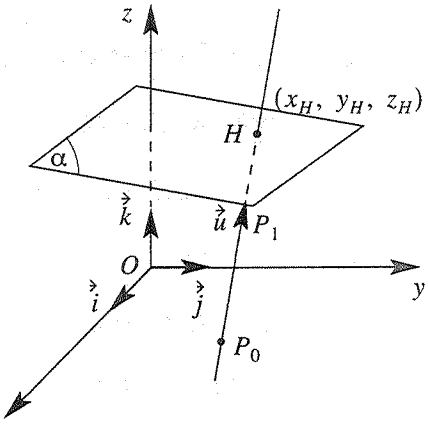
ប្រតិបត្តិ 1. ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឱ្យចំណុច $A(2,\ 4,\ 5)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{a} = (3,\ -1,\ -2)$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាម A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{a}$ ។

2. ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឱ្យពីរចំណុច $A(3,\ 2,\ 5)$ និង $B(4,\ -2,\ 1)$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយអរតូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

3. ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឱ្យបីចំណុច $A(2,\ 4,\ 5)$, $B(-5,\ -2,\ 3)$ និង $C(3,\ -1,\ -2)$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមចំណុច C ហើយអរតូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

4. កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមបីចំណុច $A(4,\ 0,\ 0)$, $B(2,\ 0,\ 3)$ និង $C(0,\ -1,\ 4)$ ។

4.3 ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយ



ឧទាហរណ៍ ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ អរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (α) ដែលមាន សមីការ $ax+by+cz+d = 0$ និងចំណុច $P_0(x_0, y_0, z_0)$ មិននៅក្នុងប្លង់ (α) ។

តាង H ជាចំណោលកែងនៃ P_0 លើប្លង់ (α) ។ ប្រវែង P_0H ហៅថាចម្ងាយពីចំណុច P_0 ទៅប្លង់ (α) ។ រកចម្ងាយ $d(P_0, \alpha)$ ពីចំណុច P_0 ទៅប្លង់ (α) ។

បើ $\vec{u} = (a, b, c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នឹង (α) និងចំណុច P_1 កំណត់ដោយ $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{u}$

$P_0P_1 = |\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ។

តាង (x_H, y_H, z_H) ជាកូអរដោនេនៃ H នោះគេបាន $\overrightarrow{P_0H}$ មានកូអរដោនេ $(x_H-x_0, y_H-y_0, z_H-z_0)$ នោះ

$$\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H} = \vec{u}\cdot\overrightarrow{P_0H} = a(x_H-x_0)+b(y_H-y_0)+c(z_H-z_0)$$

$$= (ax_H+by_H+cz_H)-(ax_0+by_0+cz_0)$$

ដោយ $H\in(\alpha)$ គេបាន $(ax_H+by_H+cz_H) = 0$ និង $ax_0+by_0+cz_0 = -d$

$$(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H}) = -(ax_0+by_0+cz_0) \qquad (1)$$

យក θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយ $\overrightarrow{P_0P_1}$ និង $\overrightarrow{P_0H}$ នោះគេបាន

$$\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H} = |\overrightarrow{P_0P_1}||\overrightarrow{P_oH}|\cos\theta \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $P_0H = |\overrightarrow{P_0H}| = \dfrac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{|P_0P_1|\cdot\cos\theta}$

ដោយ P_0H ជាចម្ងាយ នោះ $P_0H>0$ នាំឱ្យ $\dfrac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{|\overrightarrow{P_0P_1}|\cdot\cos\theta}$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

គេបាន $P_0H = |\overrightarrow{P_0H}| = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot|\cos\theta|}$

ដោយ P_0, P_1, H រត់ត្រង់គ្នា នាំឱ្យមុំ $\theta = 180°$ នោះ $|\cos 180°| = 1$

ដូចនេះ $d = (P_0, \alpha) = P_0H = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

ជាទូទៅ ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ចម្ងាយពីចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ទៅប្លង់ $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ កំណត់ដោយ $d(P_0,\ \alpha)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 រក

ក. ចម្ងាយពីចំណុច $A(-4,\ -1,\ 3)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha): x-2y+3z-16=0$ ។

ខ. ចម្ងាយពីចំណុច $O(0,\ 0,\ 0)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ ។

ចម្លើយ តាមរូបមន្តចម្ងាយ គេបាន

$$d(A,\ \alpha)=\frac{|(-4)(1)+(-1)(-2)+(3)(3)-16|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{9}{\sqrt{14}}\approx 2.41$$

ខ. $d(0,\ \alpha)=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

លំហាត់គំរូ 2 បង្ហាញថាសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ :

$$\begin{cases}2x-y+z=3 & (1)\\ x+2y-4z=4 & (2)\end{cases}$$

មានទម្រង់ $\dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b}=\dfrac{z}{c}$ ។

ចម្លើយ ដំបូងត្រូវគណនា z ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ដោយតាម (1) និង (2) ។

យើងគុណសមីការ (1) និង 2 រួចបូកនឹងសមីការ (2) គេបាន

$$+\begin{cases}2x-y+z=3 & (1)\times 2\\ x+2y-4z=4 & (2)\end{cases}$$
$$\overline{\quad 5x-2z=10\quad}$$

$$z=\frac{5x-10}{2} \qquad (3)$$

យើងគុណសមីការ (2) នឹង 2 រួចយកសមីការ (1) ដក គេបាន

$$-\begin{cases}2x-y+z=3 & (1)\\ x+2y-4z=4 & (2)\times 2\end{cases}$$
$$\overline{\quad -5y+9z=-5\quad}$$

$$z=\frac{5y-5}{9} \qquad (4)$$

តាម (3) និង (4)

គេបាន $\frac{5x-10}{2} = \frac{5y-5}{9} = z$ (5)

ចែកសមីការ (5) និង 5 នាំឱ្យ គេបាន $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{9} = \frac{z}{5}$ ។

លំហាត់គំរូ 3 ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឱ្យចំណុច $A(-3, 1, 2)$ និងប្លង់ (α) ដែលមានសមីការ $2x - y + z - 2 = 0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{u}$ មួយទៅនឹងប្លង់ (α) ។ គណនា $|\vec{u}|$ ។

ខ. គណនា $d(A, \alpha)$ ។

ចម្លើយ ក. ដោយរាងទូទៅនៃសមីការប្លង់គឺ $(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$ ដែល a, b, c ជាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{u}$ នៃប្លង់ (α) ។

តែសមីការប្លង់ (α) ដែលឱ្យគឺ $2x - y + z - 2 = 0$ ។

គេទាញបាន $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -2$ ។

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ $\vec{u}$ ណរម៉ាល់នឹង (α) គឺ $\vec{u} = (2, -1, 1)$ ។

នោះគេបាន $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ ។

ខ. ចម្ងាយពី A ទៅ (α) គឺ $d(A, \alpha) = \frac{|2(-3) + (-1)1 + 1(2) - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1. ចូររក

ក. ចម្ងាយពីចំណុច $A(3, 1, 4)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha) : x - 2y + 2z + 3 = 0$ ។

ខ. ចម្ងាយពីចំណុច $O(0, 0, 0)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha) : 3x + 2y - 4z + 5 = 0$ ។

គ. ចម្ងាយពីចំណុច $M(2, 1, 1)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha) : 2x - y + 4z - 16 = 0$ ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $(2, -1, 4)$ ។

2. បង្ហាញថា សមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 & (1) \\ 2x - y + z + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

មានទម្រង់ $\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z}{c}$ ។

មេរៀនសង្ខេប

- ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\neq\vec{0}$ និង $\vec{b}\neq\vec{0}$ ជាវ៉ិចទ័រស្របគ្នាលុះត្រាតែ $\vec{a}=m\vec{b}$ ដែល m ជាចំនួនពិត បានន័យថា $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ សមមូល $\vec{a}=m\vec{b}$ ។
- ចំពោះពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ នៅក្នុងលំហ ហើយពីរចំនួនពិត m និង n គេបាន :

  (1). $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (2). $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

  (3). $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$ (4). $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{b}$

  (5). $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+n\vec{b}$

  បើ $m\vec{a}=0$ នោះគេបាន $m=0$ ឬ $\vec{a}=\vec{0}$ ។
- ក. បើ $P(x,\ y,\ z)$ និង $P'(x',\ y',\ z')$ ជាពីរចំណុចនៃលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ គេបាន
  - $P=P'$ សមមូល $x=x'$ និង $y=y'$ និង $z=z'$ ។
  - $P\neq P'$ សមមូល $x\neq x'$ ឬ $y\neq y'$ ឬ $z\neq z'$ ។
  - $\overrightarrow{P'P}$ មានកូអរដោនេ $(x-x',\ y-y',\ z-z')$ ។
  - ចំណុចកណ្តាលនៃ PP' មានកូអរដោនេ $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2},\ \frac{z+z'}{2}\right)$ ។

ខ. បើ $\vec{u}=(x,\ y,\ z)$ និង $\vec{u}'=(x',\ y',\ z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហប្រកបដោយគោល $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ គេបាន
  - $\vec{u}=\vec{u}'\Leftrightarrow x=x'\ ,\ y=y'\ ,\ z=z'$ ។
  - $\vec{u}\neq\vec{u}'\Leftrightarrow x\neq x'\ ,\ y\neq y'\ ,\ z\neq z'$ ។
  - វ៉ិចទ័រ $(\vec{u}+\vec{u}')$ មានកូអរដោនេ $(x+x',\ y+y',\ z+z')$ ។
  - វ៉ិចទ័រ $(\vec{u}-\vec{u}')$ មានកូអរដោនេ $(x-x',\ y-y',\ z-z')$ ។
  - $\forall k\in\Re$ វ៉ិចទ័រ $k\vec{u}$ មានកូអរដោនេ $(kx,\ ky,\ kz)$ ។
  - $\forall(k,\ k')\in\Re^2$ និងវ៉ិចទ័រ $k\vec{u}+k'\vec{u}'$ មានកូអរដោនេ $(kx+k'x',\ \ ky+k'y',\ kz+k'z')$ ។

- ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហ គឺជាចំនួនពិត k មួយ កំណត់ដោយ :
  - $k=\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ បើ $\vec{u}=\vec{0}$ ឬ $\vec{v}=\vec{0}$ ។
  - $k=\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ បើ $\vec{u}\neq\vec{0}$ និង $\vec{v}\neq\vec{0}$

θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

- ក្នុងគោលអរតូណរមាល់នៃលំហ ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,\ y,\ z)$ និង $\vec{v} = (x',\ y',\ z')$ គឺ $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ ។

ក. ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,\ y,\ z)$ និង $\vec{v} = (x',\ y',\ z')$ អរតូកូណាល់គ្នា លុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ បានន័យថា $\vec{u}\perp\vec{v}$ សមមូល $xx' + yy' + zz' = 0$ ។

ខ. **ការេស្កាលែ** និង **ណម** នៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x,\ y,\ z)$ កំណត់ដោយ

$\vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ និង $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ។

គ. ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\vec{u},\ \vec{v}$ និងមុំ θ (គិតជារ៉ាដ្យង់) កំណត់ដោយ

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ នាំឱ្យ $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$ ។

- ចម្ងាយរវាង P និង Q កំណត់ដោយ

$d(P,\ Q) = PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ ។

- សមីការនៃស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(a,\ b,\ c)$ និងកាំ r គឺ

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ ។

- វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m : n$ គឺ

$\vec{c} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ ។

- វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច D ដែលចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m : n$ គឺ

$\vec{d} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ ។

- សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ គឺ $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ ។

- សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ និង $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ គឺ

$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$ ។

- សមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ មានរាង $ax + by + cz + d = 0$

- សំណុំចំណុច $Q(x,\ y,\ z)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $ax + by + cz + d = 0$ (ដែល $a,\ b,\ c,\ d$ ជាចំនួនពិត ហើយ $a,\ b,\ c$ មិនសូន្យព្រមគ្នា) គឺជាប្លង់ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ ។

- ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ចម្ងាយពីចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ទៅប្លង់ $(\alpha) : ax + by + cz = 0$ មានរាង $d(P_0,\ \alpha) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

លំហាត់

1. គេឱ្យតេត្រាអែតនិយ័ត $ABCD$ ដែលមានជ្រុងស្មើ a ។ យក M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $[CD]$ ។ បង្ហាញថា
   ក. រកផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CD}$
   ខ. បង្ហាញថា $[AB]\perp[CD]$ ។
2. ក. រកសមីការនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(2,\ -3,\ 7)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រទិសដៅ $(1,\ 1,\ -4)$ ។
   ខ. រកវ៉ិចទ័រទិសដៅនៃបន្ទាត់ $2x-6=4-y=z-5$ ។
   គ. រកមុំរវាង ក. និង ខ. ។
3. យក (L) ជាបន្ទាត់ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2-y}{3}=z+2$ និង (α) ជាប្លង់ $3x-y-2z=12$ ។
   ក. រកកូអរដោនេនៃ P ជាចំណុចដែល (L) ប្រសព្វប្លង់ (α) ។
   ខ. រកមុំដែលកើតឡើងដោយបន្ទាត់ (L) និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α) ។
4. ចូររកសមីការនៃប្លង់ខាងក្រោម :
   ក. ប្លង់កាត់តាមចំណុច $(5,\ 3,\ 4)$ ស្របទៅនឹងប្លង់ (yz) ។
   ខ. ប្លង់កាត់តាមចំណុច $(3,\ -2,\ 5)$ កែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $(-4,\ 2,\ -3)$ ។
   គ. ប្លង់កាត់តាមចំណុច $(4,\ -2,\ 3)$ ស្របទៅនឹងប្លង់ $3x+6y-4z=t$ ។
   ឃ. ប្លង់កាត់តាមបីចំណុច $(3,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 4,\ 0)$ និង $(0,\ 0,\ 5)$ ។
5. គេឱ្យប្លង់ពីរ $3x+z-1=0$ និង $x-\sqrt{5}y+2z=0$ ។
   រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់នីមួយៗ ហើយរកមុំដែលកើតឡើងដោយប្លង់ទាំងពីរនេះ ។
6. រកសមីការនៃប្លង់កាត់តាមចំណុច $(-2,\ 1,\ 3)$ ហើយកែងទៅនឹងប្លង់ $x-y+z=0$ និងប្លង់ $2x+3y-z=5$ ។
7. គេឱ្យប្លង់ $(\alpha):\ 2x+3y-6z+5=0$ និងចំណុច $M(4,\ 2,\ -5)$ ។
   ក. កំណត់វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α) ។
   ខ. យក $\overrightarrow{HM_0}=t\cdot\vec{n}$ (t ជាចំនួនពិត) ។ កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឱ្យ $H\in(\alpha)$
   គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច H និងចម្ងាយ HM_0

PROEUS DARA

លំហាត់ជំពូក

1. ស្វ៊ែរមួយមានផ្ចិត $(3,\ 7,\ 4)$ និងមានកាំស្មើនឹង 5 ហើយប្រសព្វជាមួយប្លង់ (xy) និង (yz) បង្កើតបានរង្វង់ពីរ ។ រកផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់នីមួយៗ ។

2. ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់តម្លៃ m និង n ដែលបីចំណុច $A(2,\ 3,\ -4)$, $B(3,\ 1,\ -1)$ និង $C(m,\ 7,\ n-1)$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់មួយ ។

   ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់តម្លៃ m ដែលបួនចំណុច $P(4,\ -2,\ 5)$, $Q(-3,\ 4,\ -4)$, $R(1,\ 2,\ 4)$ និង $S(m,\ 1-m,\ 4)$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់មួយ ។

3. រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $(3,\ -1,\ 2)$ ដែលបង្កើតមុំ $60°$, $45°$ និង $60°$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស អ័ក្សអរដោនេ និងអ័ក្សកូតរៀងគ្នា ។

4. បង្ហាញថា បន្ទាត់ពីរ $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = z+4$ និង $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z$ ស្របគ្នា ហើយរកសមីការនៃប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ទាំងពីរ ។

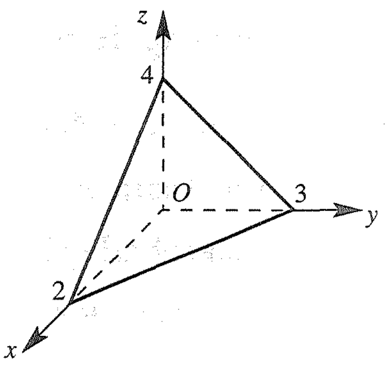
5. បង្ហាញថា បន្ទាត់ពីរ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{5}$ និង $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ហើយរកសមីការនៃប្លង់ដែលកំណត់ដោយបន្ទាត់ទាំងពីរ ។

6. រកមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយប្លង់ (xy) ប្លង់ (yz) និងប្លង់ (zx) ហើយនឹងប្លង់ $6x+4y+3z = 12$ ។

7. យក (α) ជាប្លង់ $4x+3y+5z = 50$

   ក. រកចម្ងាយរវាងប្លង់ (α) និងចំណុចគល់តម្រុយ ។

   ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹងគល់តម្រុយធៀបទៅនឹងប្លង់ (α) ។



8. បើប្រវែងនៃពីរវ៉ិចទ័រ $t\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{a}-t\vec{b}$ ស្មើគ្នា ។ រកមុំដែលផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ហើយបង្ហាញថា $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ និង $t \neq 0$ ។

9. ក. យក $\vec{a} = (1, 1, \sqrt{2})$ និង $\vec{b} = (1, 2, 3)$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ t ដែល $|\vec{b} - t\vec{a}|$ អប្បបរមា។

ខ. យក t_0 ជាតម្លៃដែលរកឃើញនៅសំណួរ ក. ។

បង្ហាញថា $\vec{b} - t_0\vec{a}$ កែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ ។

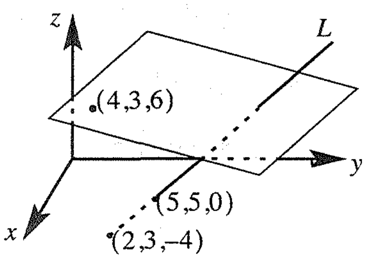
10. តើសំណុំចំណុច P ជារូបអ្វី ដែលមានចម្ងាយស្មើពីបីចំណុច $A(4, 3, -2)$, $B(4, -3, 6)$ និង $C(-4, 5, 6)$? រកសមីការនៃរូបនោះ។

11. យក A ជាចំណុច $(-2, 1, 3)$ និង (α) ជាប្លង់ $3x + y - 2z = 17$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច H ដែល H ជាចំណុចប្រសព្វត្រង់បន្ទាត់កែងកាត់តាមចំណុច A ទៅនឹងប្លង់ (α) ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែល B ស៊ីមេទ្រីនឹងចំណុច A ធៀបទៅនឹងប្លង់ (α) ។

12. បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $(2, 3, -4)$ ហើយប្រសព្វប្លង់ (xy) ត្រង់ចំណុច $(5, 5, 0)$ ។



ក. រក $a : b : c$ បើប្លង់ $ax + by + cz = d$ អរតូកូណាល់ជាមួយ (L) ។

ខ. រកសមីការនៃប្លង់ក្នុងសំណួរ ក. បើវាកាត់តាមចំណុច $(4, 3, 6)$ ។

13. កំណត់មេគុណ b, c និង d ដែលប្លង់ $x + by + cz + d = 0$ មានបន្ទាត់ពីរ $3x = -2y = 6z$ និង $2x = y = -z$ ដែលប្រសព្វគ្នាត្រង់គល់តម្រុយ ។

14. ចូររកសមីការនៃប្លង់ដែលមានបន្ទាត់ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ និងកាត់តាមចំណុច $(1, -1, 2)$ ។

15. គេឱ្យ $M_0(3, -2, 1)$ និងបន្ទាត់ $(L) : 2 - x = \frac{2-y}{3} = z + 1$ ។

ក. កំណត់វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{u}$ នៃ (L) ។

ខ. កំណត់សមីការនៃប្លង់ (α) ដែលកាត់តាម M_0 និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{u}$ ។

គ. គណនាចម្ងាយ HM_0 ។

ចម្លើយជំពូក ១

មេរៀនទី ១

1. ក. $\sum_{k=1}^{100} k$ ខ. $\sum_{k=1}^{22} k^2$ គ. $\sum_{k=1}^{15} k^3$ ឃ. $\sum_{n=1}^{20} n \times (n+2)$

2. ក. $1+2+3+4+5+6$ ខ. $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

   គ. $(3.4-1)+(3.5-1)+\ldots+(3.9-1)$

   ឃ. $(-1)^2 \cdot 2+(-1)^3 \cdot 3+(-1)^4 \cdot 4+\ldots+(-1)^7 \cdot 7$ ។

3. ក. 506 ខ. 4900 គ. 4394 ។

4. ក. 90000 ខ. 14400 គ. 75600 ។

5. ក. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ខ. 8120 6. ក. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ខ. 153130

7. ក. n^2-2n+2 ខ. $\frac{1}{6}n(2n^2-3n+7)$

8. ក. $a_n = \frac{2n^3+3n^2+7n-6}{6}$ ខ. $\frac{n^4+4n^3+11n^2-64n}{12}$

9. $a_n = \frac{1}{2}[(p+q)+(-1)^{n-1}(p-q)]$

មេរៀនទី ២

1. ក. 2, 3, 0, –4 ខ. 5, 7, 17, 55 2. 21

3. $p = 4$, $q = -2$, $p = -4$, $q = \frac{10}{3}$

4. ក. $3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ ខ. $a_n = 1+(n-1)\frac{4}{4}$ គ. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$ ។

5. ខ. $b_n = n$, $a_n = \frac{1}{n}+3$ ។ 6. ក. $2a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n-1}}$ ខ. $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$

មេរៀនទី ៣

5. ក. $(3x-1)^4 = 81x^4-108x^3+54x^2-12x+1$

   ខ. $(2x+y^6) = 64x^6+192x^5y+240x^4y^2+160x^3y^3+60x^2y^4+12xy^5+y^6$

   គ. $(a+b)^6 = a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

1. 3, 7, 11 2. $S_8 = 40$ ឬ $S_8 = -24$

4. ក. $U_{10} = \frac{4}{6561}$ ខ. តួទី 8 នៃស៊ីត គ. $S_{20} = \frac{6\times 3^{19} - 2}{3^{18}}$

5. $S_n = 3^n - 1$ 6. $S_n = \frac{1-(n-1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ 7. $U_1 = 16$

8. $U_1 = 3$, $U_2 = 15$, $U_3 = 75$, $U_1 = 75$, $U_2 = 15$, $U_3 = 3$

9. ក. $S_n = \frac{2n}{n+1}$ ខ. $S_n = \frac{n^2+n}{2(2n+1)^2}$

10. ក. $a_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)n + 1$ 11. ក. $\frac{n}{3}(n+2)(2n-1)$ ខ. 5720 ។

12. $\sum_{n=1}^{100}(3n-2)$ 15. ក. $U_1 = \frac{4}{3} U_2 = \frac{10}{7} U_3 = \frac{24}{17}$

16. ក. $b_n = 6 + (n-2)2^{n+1}$ ខ. $a_n = (n-2)2^n + \frac{6}{2^n}$ ។ 17. $(x^2-2y)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}_7C_r x^{7-r} y^r$

ខ. $-{}_7C_5(x^2)^{7-5}(2y)^5 = -21\cdot x^4 \cdot 32y^5 = -672x^4y^5$

18. $(1+x)^n = {}_nC_0 1^n + {}_nC_1 1^{n-1}x + {}_nC_2 1^{n-2}x^2 + {}_nC_3 1^{n-3}x^3 + \ldots + {}_nC_{n-1}1x^{n-1} + {}_nC_n x^n$

បើ $x = 1$ គេបាន ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \ldots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$

19. ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \ldots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$ គេដឹងថា ${}_nC_0 = {}_nC_n$; ${}_nC_1 = {}_nC_{n-1} = \ldots$

នោះ $2({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \ldots + {}_nC_{n-1}) = 2({}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \ldots + {}_nC_n) = 2^n$

ដូចនេះ ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \ldots + {}_nC_{n-1} = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \ldots + {}_nC_n = 2^{n-1}$

ចម្លើយជំពូក ២

មេរៀនទី ១

2. ក. 6 ខ. 2 គ. 8 ឃ. 4 ង. $\frac{1}{8}$ ច. 6 ឆ. 7 ជ. 27

3. $f(x) = a^x$, $f(y) = a^y$ គេបាន $f(x)f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+R}$ នោះ $f(x)f(y) = f(x+y)$ ។

6. ក. $a^x = 1$ បើ $a > 0$ ហើយ $x = 0$ ឬ បើ $a = 1$ ហើយ $x \in R$

ខ. $a^x > 1$ បើ $a > 1$ ហើយ $x > 0$ ឬ បើ $0 < a < 1$ ហើយ $x < 0$

គ. $0 < a^x < 1$ បើ $a > 1$ ហើយ $x < 0$ ឬ បើ $0 < a < 1$ ហើយ $x > 0$

9. ក. $3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$, $3^{x^2+4x} = 3^{-3}$, $x^2+4x+3 = 0$ នាំឱ្យ $x = -1$; $x = -3$

ខ. $3^{5x}\cdot 9^{x^2} = 27$, $3^{5x}\cdot 3^{2x^2} = 3^3$, $3^{2x^2+5x} = 3^3$, $2x^2+5x-3 = 0$

នាំឱ្យ $x = \frac{1}{2}$; $x = 3$

គ. $4^{3x^2+2x+1} = 16$,$4^{3x^2+2x+1} = 4^2$,$3x^2+2x-1 = 0$ នាំឱ្យ $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$

មេរៀនទី ២

3. ក. $f^{-1}(x) = \log_5 x$

5. $f(x) = \log_a x$, $f(y) = \log_a y$ គេបាន $f(xy) = \log_a xy$,$f(xy) = \log_a x + \log_a y$

ដូចនេះ $f(xy) = f(x)+f(y)$ ។

8. ក. $f(g(x)) = f(2^x) = 2^x - \log_2 2^x = 2^x - x$ ខ. $g(f(x)) = g(x-\log_2 x) = 2^{x-\log_2 x}$

9. ក. $x = 2$ ខ. $x = 2^{\frac{10}{3}}$ គ. $x = 10^{\frac{\log 3125}{1+\log 5}}$ ឃ. $\sqrt{50}-5$

10. $2 < m \le 3$ 11. $-\frac{1}{2} < a < 0$

ចម្លើយជំពូក ៣

មេរៀនទី ១

3. ក. $x = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$ ខ. $-1 < m < 0$

5. ក. $\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{4}+2k\pi$ ខ. $\left[\begin{array}{l} -\frac{3\pi}{4}+k\pi < x < \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \tan\alpha = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$

គ. $-\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{3}+k\pi$ ឃ. $\left[\begin{array}{l} -\pi+2k\pi < x < -\pi+\alpha+2k\pi \\ -\alpha+2k\pi < x < 2k\pi \quad ; \quad \sin\alpha = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

7. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8} \iff \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right] \le \frac{1}{8}$

$$\sin^2\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\left[\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{B-C}{2}\right) \ge 0 \text{ ពិត}$$

6

PROEUS DARA

មេរៀនទី២

3. ក. $2x^3 - 17x^2 + 7x + 8$ ខ. $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 8)(\sin x - 1) = 0$

7. ក. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

ខ. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;;\; y = k\pi \quad (k \in z)$ គ. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in Z)$

9. $\frac{A+C}{2} = B$ ដោយ $A + B + C = \pi \Rightarrow 3B = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$

$$\sin A + \sin\frac{\pi}{3} + \sin C = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A + \sin C = \frac{3}{2}$$

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$A - C = \frac{\pi}{3}$ ដែល $A + C = \pi - B = \frac{2\pi}{3}$

$$2A = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi - (A + B) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

ដូចនេះ $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{6}$

ចម្លើយជំពូក ៤

មេរៀនទី១

2. ក. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}$

3. $f(3\vec{u} - 2\vec{v}) = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

1. k, y) = (−6, 7) **2.** k, y) = (6, −6) ឬ x, y) = (−6, 6)

3. $K = -1$ ឬ $K = 6$ **5.** $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$ (បង្ហាញថា $a \neq o$ ឬ $b \neq o$) **8.** ខ. $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

9. បន្ទាត់ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ **10.** ក. អ័ក្ស ox : បន្ទាត់ $y = -\frac{a}{2}x$

អ័ក្ស oy : បន្ទាត់ $y = o$

11. $a = -2;\ b = -3$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

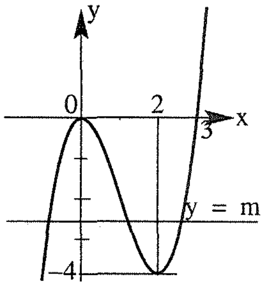
14. $l_1 : x + y - 1 = o$

$l_2 : 3x + y - 1 = 0$

ចម្លើយជំពូក ៥

មេរៀនទី ១

1. ក.



ខ. $m > 0$: សមីការមានឫសមួយ

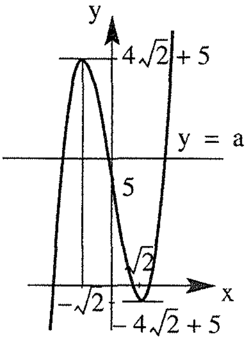
$m = 0$: សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា

$-4 < m < 0$: សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

$m = -4$: សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា

$m < 4$: សមីការមានឫសមួយ

2. ក.



ខ. $a > 4\sqrt{2} + 5$: សមីការមានឫស $x_3 > 0$

$a = 4\sqrt{2} + 5$: សមីការមានឫស $x_1 = x_2 < 0 < x_3$

$5 < a < 4\sqrt{2} + 5$: សមីការមានឫស $x_1 < x_2 < 0 < x_3$

$a = 5$: សមីការមានឫស $x_1 < x_2 = 0 < x_3$

$-4\sqrt{2} + 5 < a < 5$: សមីការមានឫស $x_1 < 0 < x_2 < x_3$

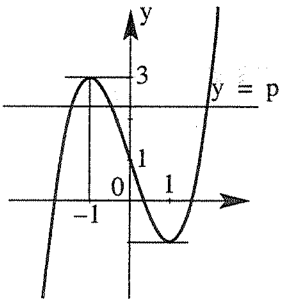
$a = -4\sqrt{2}+5$: សមីការមានឫស $x_1 < 0 < x_2 = x_3 = \sqrt{2}$

$a < -4\sqrt{2}+5$: សមីការមានឫស $x_1 < 0$

3. ក. សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា កាលណា $k \in (-20,\ 13)$

ខ. $k \in (-20,\ 0)$

4. ក.



ខ. $p > 3$: មានឫស x_3 ដែល $-1 < 1 < x_3$

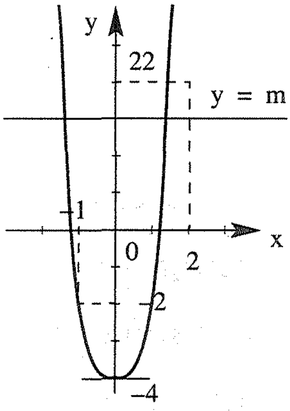
$p = 3$: មានឫស $x_1 = x_2 = -1 < 1 < x_3$

$-1 < p < 3$: មានឫស $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$

$p = -1$: មានឫស $x_1 < -1 < x_2 = x_2 = 1$

$p < -1$: មានឫស $x_1 < -1 < 1$

5. ក.



ខ. $m > 22$: មានឫស $x_1 < -1 < 2 < x_2$

$m = 22$: មានឫស $x_1 < -1 < x_2 = 2$

$-2 < m < 22$:មានឫស $x_1 < -1 < x_2 < 2$

$m = -2$: មានឫស $x_1 = -1 < x_2 < 2$

$-4 < m < -2$:មានឫស $-1 < x_1 < x_2 < 2$

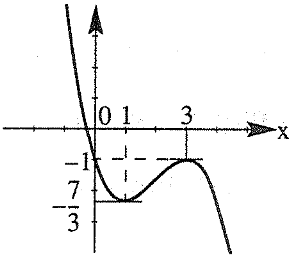
$m = -4$: មានឫស $-1 < x_1 = x_2 = 0 < 2$

$m < -4$: គ្មានឫស

6. ក. $a \in \left(-1,\ \frac{7}{16}\right)$

ខ. $a \in \left(\frac{7}{16},\ +\infty\right)$

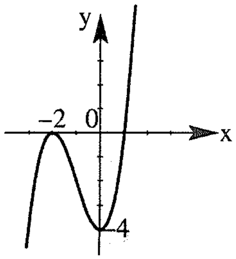
7. ក.



ខ. សំណុំឫស

$S = [0,\ +\infty)$

8. ក.



ខ. ក្រាប C ស្ថិតនៅពីខាងក្រោម ឬប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ចំពោះ $x \le 2$

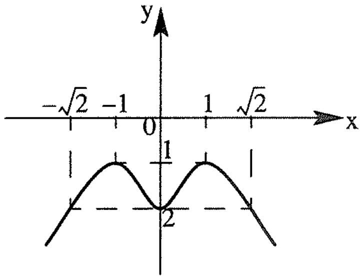
ដូចនេះ $x^3 + 3x^2 - 4 \le 0$ ចំពោះ $x \le 2$

9. ក. $S = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

ខ. ក្រាបស្ថិតនៅពីខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីសចំពោះ $x \in (-1, 1)$

ដូចនេះ $\frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2} < 0$ ចំពោះ $x \in (-1, 1)$ ។

10 ក.



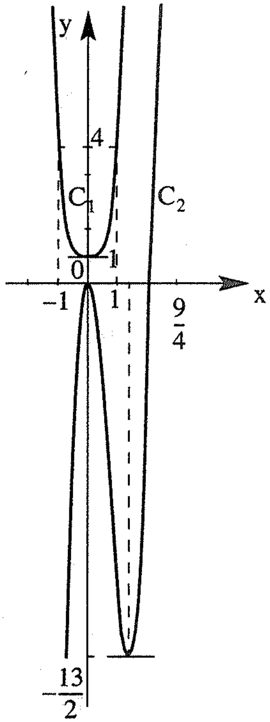
ខ. $S = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

គ. ក្រាបតាង f ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ $y = -2$

ចំពោះ $x < -\sqrt{2}$ ឬ $x > \sqrt{2}$

ដូចនេះ $f(x) < -2$ ចំពោះ $x < -\sqrt{2}$ ឬ $x > \sqrt{2}$

11. ក.



ខ. តាមក្រាប C_1 ស្ថិតនៅពីខាងក្រោម C_2

ចំពោះ $x_2 \ge 0$ ដូចនេះ ចំពោះ $x \ge 0$ គេបាន

$3x^4 + 1 > 8x^3 - 18x^2$ ។

គ. $f'(x) = 12x(x^2 - 2x + 3)$

$f(0) = 1$

ឃ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	−	0	$+\infty$
f(x)	↘	1	↗

ដូចនេះ ចំពោះ $x \ge 0$ គេបាន $f(x) > 0$ ។

ចម្លើយជំពូក ៦

មេរៀនទី ២

1. A = គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 1 , B = គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខខុសគ្នា

$n(A\cap B) = 10$, $n(B) = 6\times 5 = 30$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

2. ក. $P(A/B) = \frac{5\times4\times4}{5\times5\times4} = \frac{4}{5}$, $Pc/(A\cap B) = \frac{5\times4\times1}{5\times4\times4} = \frac{1}{4}$

$$P(A/c) = \frac{P(A\cap c)}{P(c)} = \frac{P(c)}{P(c)} = \frac{5\times4\times1}{5\times4\times1} = 1$$

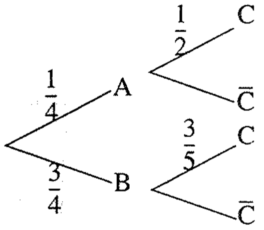
ខ. $P(A/c)\neq P(A)$: A និង C អាស្រ័យគ្នា

គ. $P(A) = \frac{5\times5\times4}{6\times5\times4} = \frac{5}{6}$, $P(A/B) = \frac{4}{5}$

$P(A/B)\neq P(A)$: A និង B អាស្រ័យគ្នា

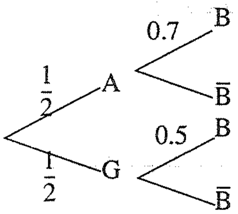
3. ក. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(c/B) = \frac{3}{5}$

ខ. $P(c) = P(A\cap C) + P(B\cap C) = \frac{1}{8} + \frac{9}{20} = \frac{23}{40} = 0.575$



គ. $(A/c) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{23}{40}} = \frac{5}{23} = 0.21$

4.



$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap G) = \frac{1}{2}\times0.7 + \frac{1}{2}\times0.5 = 0.6$

$P(G/B) = \frac{P(B\cap G)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.6} = 0.416$

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

1. ក. $S = \{\{1,\ 1\},\{1,\ 2\},\{1,\ 3\},\{2,\ 2\},\{2,\ 3\}\}$

$P(\{1,\ 1\}) = \frac{c(3,2)}{c(6,2)} = \frac{3}{15}$, $P(\{1,\ 2\}) = \frac{c(3,1)\times c(2,1)}{c(6,2)} = \frac{6}{15}$

$P(\{1,\ 3\}) = \frac{3}{15}$, $P(\{2,\ 2\}) = \frac{1}{15}$, $P(\{2,\ 3\}) = \frac{2}{15}$

ខ. $A = \{\{1, 2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

$P(A) = \frac{6}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$

$B = \{\{1, 2\},\{1, 3\}\}$

$P(B) = \frac{3}{5}$

$C = \{(1, 1),(1, 2),(1, 3)\}$

$P(C) = \frac{4}{5}$

គ. $D = \{\{1, 3\},\{2,2\}\}$

$P(D) = \frac{4}{15}$

2. ក. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$

ខ. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = ((A \cap B) \cup A) \cap (A \cap B \cup \bar{B}) = A \cap A = A$

$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0.7$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$

$P(\bar{A} \cup B) = 0.9$

3. ក. A ព្រឹត្តិការណ៍គ្មានត្រូវរង្វាន់សោះ $P(A) = \frac{c(145, 10)}{c(150, 10)} = 0.7048$

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ដែលត្រូវរង្វាន់យ៉ាងតិចមួយសន្លឹកគឺ $\bar{A}$: $P(\bar{A}) = 1 - 0.7048 = 0.2952$

គ. $P(B) = \frac{c(5, 3) \times c(145, 7)}{c(150, 10)} = 0.002$ ឃ. $P(c) = \frac{c(5, 5) \times c(145, 5)}{c(150, 10)} = 0.0000004$

4. ក. ប្រូបាបត្រូវចម្លើយត្រៀមរួច 3 សំណួរ : $P(A) = 0.0142$

ខ. $P(B) = \frac{c(25, 2) \times c(75, 1)}{c(100, 3)} = 0.1391$ គ. $P(c) = \frac{c(75, 3)}{c(100, 3)} = 0.4176$

ឃ. $P(\bar{c}) = 1 - P(c) = 0.5824$

5. $P(A) = 0.3877$, $P(B) = 0.0135$, $P(c) = 0.10298$

6. ក. $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(R) = \frac{1}{8}$, $P(C \cap R) = \frac{1}{32}$

$P(C \cap R) = P(C) \times P(R) \Rightarrow$ C និង R មិនអាស្រ័យគ្នា

ខ. $P(C/F) = \frac{1}{11}$ C និង F អាស្រ័យគ្នា

7. ក. $P(A) = 0.15$, $P(B/A) = 0.15$, $P(B/\bar{A}) = 0.04$

ខ. $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0.0225 + 0.034 = 0.0565$

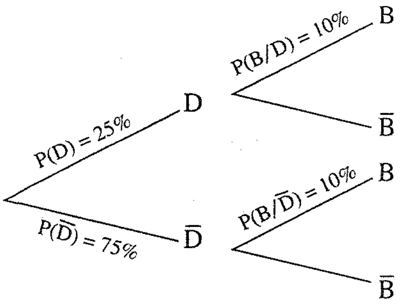
$$P(A/B) = \frac{0.0225}{0.0565} = 0.398$$

8. ក. $P(B) = 0.025 + 0.675 = 0.7$

ខ. $P(\bar{D}/B) = \dfrac{0.675}{0.7} = 0.9642$

គ. $n(B) = 70$

$n(\bar{D}) \approx 68$



ចម្លើយជំពូក ៧

មេរៀនទី ១

2. ក. $\frac{26}{35} + \frac{529}{70}i$ ខ. $\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$ គ. $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6} + \frac{i}{3}$

3. $-11 - 2i$ និង $625 - 336i$ 4. $x = 3$

មេរៀនទី ២

6. ក. $10\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ ខ. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

គ. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ង. $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

8. ក. $z = 1 + i\sqrt{3}$ ខ. $z = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$

គ. $z = -i$ ឃ. $z = -3\sqrt{3} - 3i$

9. ក. $|z| = \frac{1}{\cos\alpha}$ ខ. $|zw| = \frac{4}{\cos\alpha}$

គ. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ឃ. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{2\pi}{5} - \alpha$

10. ក. $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

13. $z' = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

មេរៀនទី ៣

5. ខ. $1+z+z^2+\ldots+z^{11} = 0$ 9. ង. $z_k = 2\left(\cos\frac{11\pi+12k\pi}{18} + i\sin\frac{11\pi+12k\pi}{18}\right)$

$k = 0,\ 1,\ 2$

ច. $z_k = \cos\frac{5\pi+8k\pi}{20} + i\sin\frac{5\pi+8k\pi}{20}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

មេរៀនទី ៤

4. 1. $AB = 5\sqrt{2}$ 2. ក. $AB = \sqrt{17}$ ខ. $z = \frac{3}{2} - i$

4. $AP = \frac{\sqrt{137}}{2}$, $BN = 8$, $CM = \frac{\sqrt{569}}{2}$ 7. $\frac{AC}{AB} = 16$ និង $\varphi = \frac{\pi}{3}$

10. ក. បន្ទាត់ $2x - y - 3 = 0$ ខ. បន្ទាត់ $x = \frac{3}{2}$

គ. រង្វង់ផ្ចិត $\left(-\frac{38}{16}\ ,\ 0\right)$ និង $R = \frac{38}{16}$ ។

ចម្លើយលំហាត់ជំពូក

4. ក. $(\sqrt{3}-i)^{100} = 2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

6. ក. $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$

8. គ. បន្ទាត់ $y = 1$ ឃ. វិសមីការ $x < 0$ ង. និង ច. $y = x$

ចម្លើយជំពូក ៤

មេរៀនទី ១

1. ក. $\vec{x} = (13,\ 31,\ -34)$ ខ. $\vec{x} = (-6,\ -22,\ 26)$

2. $\ell = 2$, $m = 3$, $n = 4$, $\vec{p} = (5,\ 6,\ 7)$

3. ក. $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\beta = \frac{-4\sqrt{2}}{10}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ខ. $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$, $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

4. ក. $(x,\ y) = \left(-\frac{10}{3},\ -\frac{23}{4}\right)$ ខ. $z = -\frac{1}{7}$ ដូចនេះតម្លៃ $(x,\ y,\ z) = \left(-\frac{10}{3},\ -\frac{23}{4},\ -\frac{1}{7}\right)$

5. $(x, y, z) = \left(-12, -3, \frac{4}{3}\right)$ 6. $x_1 : x_2 : x_3 = 3 : 4 : 5$ 7. $k = -\frac{2}{3}$

8. ក. ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ខ. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}$

9. ក. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 22$

11. ក. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = -1$, $\vec{w}\cdot\vec{u} = 3$

ខ. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{13}{15}$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{9}{10}$, $\vec{w}\cdot\vec{u} = \frac{7}{6}$

12. $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = a^2$, $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = a^2$, $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

មេរៀនទី ២

1. ក. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}a^2$, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}a^2$

2. ក. $x-2 = y+3 = \frac{7-2}{4}$ ខ. $(1, 1, 1)$

3. ក. $(3, -1, -1)$ ខ. $\theta = \frac{\pi}{2}$ ឬ $\theta = 90°$

4. ក. $y+z-7 = 0$ ខ. $4x-2y+3z-31 = 0$

គ. $3x+6y-4z+12 = 0$ ឃ. $20x+15y+12z-120 = 0$

5. $\vec{n} = (3, 0, 1)$, $\vec{n} = (1, -\sqrt{5}, 2)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ឬ $\theta = 60°$

6. $x-y+z = 0$, $2x+3y-z+4 = 0$

7. ក. $\vec{n} = (2, 3, -6)$ ខ. $t = 1$ គ. $H(2, -1, 1)$

ចម្ងាយ $HM_0 = 7$

មេរៀនទី ៣

1. ផ្ចិត $(3, 7, 0)$ កាំ 3 ជាមួយប្លង់ xy

ផ្ចិត $(0, 7, 4)$ កាំ 4 ជាមួយប្លង់ yz

2. ក. $m = 0$, $n = -9$ ខ. $m = 5$ 3. $2(x-3) = \sqrt{2}(y+1) = 2(z-2)$

4. $2x-y-z = 2$ 5. $13x-y-7z = 24$ 6. 4 7. ក. $5\sqrt{2}$ ខ. $(8, 6, 10)$

8. $\theta = \frac{\pi}{2}$ ឬ $\theta = 90°$ 9. $t = \frac{3(1+\sqrt{2})}{4}$ 10. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3}$ 11. ក. $(4, 3, -1)$

ខ. $(10, 5, -5)$ 12. ក. $3 : 2 : 4$ ខ. $3x+2y+4z = 42$ 13. $b = \frac{5}{4}$, $c = \frac{7}{4}$, $d = 0$

14. $2x+2y+3z-6 = 0$ 15. ក. $\vec{U} = (1, 3, 1)$ ខ. $x+3y+z+2 = 0$ ។

បទានុក្រម

ក

កាទីល (Quatile) ភាគបួននៃទិន្នន័យទាំងអស់ ។

កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ : បើគេមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{u} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ នោះកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{u}$ គឺ $(a,\ b,\ c)$ ឬ $\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ ។

កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ : បើ $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ នោះគេបាន : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$

កូអរដោនេចែកក្នុងនៃវ៉ិចទ័រទីតាំង : វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ គឺ $\vec{c} = \dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

កូអរដោនេចែកក្រៅនៃវ៉ិចទ័រទីតាំង : វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{d}$ នៃចំណុច D ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ គឺ $\vec{d} = \dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

គ

គំរូ (Sample) : ជាសំណុំរងនៃសំណុំស្ថិតិសកល ។

គំលាត ឬគំលាតស្តង់ដា : (Standard deviation) ជាឬសការេនៃវ៉ារ្យង់ ។

ច

ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់ក្នុងលំហ : ចម្ងាយពីចំណុច $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ទៅប្លង់ (α): $+by+cz+d = $ មានរាង

$$d = (P_0,\ \alpha) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ចំណុចរបត់ : ចំណុចណាមួយនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ដែលនៅត្រង់នោះ ក្រាបប្តូរភាពប៉ោង ផត ។

ចំនួនកុំផ្លិច : (Complex number) ជាចំនួនដែលមានរាង $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

ចំណុចឥតប្រែប្រួល : បើ Q ជាចំណុចឥតប្រែប្រួលទៅតាមបំលែង A កាលណា $A(Q) = Q$ ។

ច្បាប់នៃវិធីគុណ : ប្រើដើម្បីគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស

ឈ

ឈ្នាប់ : ការភ្ជាប់រវាងសំណើពីរដោយពាក្យ ឬសញ្ញាបង្កើតបានសំណើថ្មីហៅថាឈ្នាប់

ឈ្នាប់និង : $P \wedge q$

ឈ្នាប់ឬ : $P \vee q$

ឈ្នាប់នាំឱ្យ : $P \Rightarrow q$

ឈ្នាប់សមមូល : $P \Leftrightarrow q$

ដ

ដេរីវេ : លីមីតនៃអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម កាលណាអថេរមានបម្រែបម្រួលតូចស្មើរតែសូន្យ ។

ត

តម្លៃ **Z (Z Value)** ជាចម្ងាយរវាងតម្លៃដែលគេបានជ្រើសរើស និងមធ្យមស្ថិតិសកល ចែកនឹងគំលាតស្តង់ដា $Z = \dfrac{X-\mu}{\delta}$ ។

តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ : គឺគ្រប់ចតុធាតុ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែល o ជាចំណុចមួយនៃលំហហៅថា គល់ និង $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ហៅថាគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ ។

តម្រុយក្នុងលំហ : គេហៅតម្រុយក្នុងលំហ គឺគ្រប់ចតុធាតុ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ជាចំណុចមួយក្នុងលំហានិង $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ជាបីវ៉ិចទ័រមិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។

ទ

ទិសដៅកូស៊ីនុស : $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{u}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{u}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{u}|}$

ដែល $\vec{u} = (x, y, z)$

ទីតាំងនៃចំណុច : P គឺ $\vec{p}$ ដែលកំណត់សរសេរ $P(\vec{p})$ ។

ទ្វេធា : គឺជាពហុធាដែលមានពីរតួ ។

ទ្រឹស្តីបទបៃយេស : រកឃើញដោយ Reverend Thomas Bayes នៅសតវត្សទី 18

បំណែងចែកន័រម៉ាល់ : (Normal distribution)

ជាបំណែងចែកដែលមានរាងជាជួងមានលក្ខណស៊ីមេទ្រី និងមានមធ្យម ម៉ូត មេដ្យាននៅត្រួតស៊ីគ្នា ។

ប្រូបាប **:** តម្លៃដែលយកក្នុងចន្លោះបិទ 0 និង 1 ដែលបង្ហាញពីសំណាងដែលត្រូវមាននៃព្រឹត្តិការណ៍មួយនឹងត្រូវកើតឡើង ។

ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ **:** សំណាងដែលត្រូវមាននៃព្រឹត្តិការណ៍មួយនឹងកើតឡើងដោយដឹងថាមានព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀតបានកើតមុនរួចហើយ ។

បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាស្រ័យគ្នា :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍អាស្រ័យគ្នា :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$P(B) \times P(A/B)$$

បើព្រឹត្តិការណ៍ B កើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A_1 និងកើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A_2 ដែល $A_1 \cap A_2 = \varnothing$: នោះ

$$\frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)}$$

បំលែងលីនេអ៊ែ **:** គឺជាការប្លែងចំណុច $M(k_1 y)$ ទៅ $M'(x', y')$ កំណត់ដោយសមីការ $\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$ ។

គេអាចសរសេរបំលែងនេះជាម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

បំលែងលីនេអ៊ែច្រាស **:** បើ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

នោះបំលែងលីនេអ៊ែច្រាសរបស់ A គឺ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ។

បំលែងឆ្លុះធៀបអ័ក្ស $x'x$ **:** ជាបំលែងដែលមានរាង $Sx'x$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O **:** ជាបលែងដែលមានរាង S_o : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

បំលែងរំកិល **:** ជាបំលែងដែលមានរាង

$$R(o, \alpha) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha - \sin\alpha \\ \sin\alpha \quad \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

បំលែងបណ្ដាក់ **:** បើ $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$$

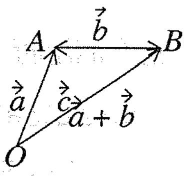
នោះគេបានបំលែងបណ្តាក់គឺ:

$$M \xrightarrow{A} M' \xrightarrow{B} M''$$

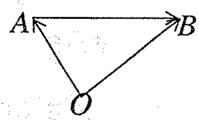
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = BA \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ប្រមាណវិធីគុណវ៉ិចទ័រ : $\vec{b} = k\vec{a}$ បើ $k > 0$ នោះ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មានទិសដៅដូចគ្នា ហើយ $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$ បើ $k < 0$ នោះ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា ហើយ $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$

ប្រមាណវិធីបូកវ៉ិចទ័រ : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ឬ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



ប្រមាណវិធីដកវ៉ិចទ័រ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$



ផ

ផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\theta$ (θ : ជាមុំផ្គុំដោយ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ បើ $\vec{u} = 0$ ឬ $\vec{v} = 0$ ។

ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត : គឺជាផលសងនៃពីរតួបន្តបន្ទាប់គ្នាជាចំនួនថេរតាងដោយ $d = U_{n+1} - U_n$ ។

ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ : គឺជាផលធៀបនៃពីរតួបន្តបន្ទាប់គ្នាតាងដោយ $q = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ ។

ផលធៀបរួម ឬរេស៊ុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ : គឺជាផលធៀបនៃពីរតួបន្តបន្ទាប់គ្នាតាងដោយ $q = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ ។

ព

ពហុគុណរួមតូចបំផុត : ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃកន្សោម A និងB គឺជាផលគុណកត្តារួមមាននិទស្សន្តធំជាងគេ កត្តាមិនរួមទាំងអស់ ។

ពហុធា : ជាផលបូកនៃម៉ូនូមច្រើនឯកធា ។

ភ

វិស័យ (Range) ជាផលសងរវាងតម្លៃទិន្នន័យ ដែលខ្ពស់ជាងគេនិងតម្លៃនៃទិន្នន័យដែលទាបជាងគេ ។

ម

វ៉ារ្យង់ (Variance) ជាមធ្យមនៃការេគំលាតពីមធ្យម ។

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ : អង្កត់មានទិសដៅនៅក្នុងលំហ ហៅថាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ។

វ៉ិចទ័រស្របគ្នា : វ៉ិចទ័រ $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$ $\cdot (k \in \mathbb{R})$

វ៉ិចទ័រឯកតា : វ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែងស្មើ 1 ហៅថាវ៉ិចទ័រឯកតា ។

វ៉ិចទ័រស្មើគ្នា : វ៉ិចទ័រស្មើគ្នា ជាវ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែងស្មើគ្នា និងមានទិសដៅដូចគ្នា ។

វ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា **:** វ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា ជាវ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែងស្មើគ្នា មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា។

វ៉ិចទ័រសូន្យ **:** វ៉ិចទ័រសូន្យ ជាវ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែងស្មើសូន្យ។

វ៉ិចទ័រទីតាំង **:** វ៉ិចទ័រ $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច P គឺជាវ៉ិចទ័រដែលមាន O ជាគល់។

វិចារកំណើន ឬវិចារអនុមានរួមសំណើ $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1, 2, \ldots$ បើវាផ្ទៀងផ្ទាត់សំណើពីរខាងក្រោម :

(1) $P(1)$ និង (2) $P(k)$

ពិតនាំឱ្យ $P(k+1)$ ពិតចំពោះគ្រប់ k ។

ស

ស្ថិតិសកល **:** (Population) ជាសំណុំនៃឯកតាទាំងអស់ ដែលគេលើកយកមកសិក្សា មានដូចជាក្រុមមនុស្ស សត្វ ឬវត្ថុ។

ស្កាលែ និងណម **:**

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow$

$\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ ហើយ

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ស្វ៊ែរ **:** សំណុំចំណុចដែលមានចម្ងាយថេរ r ពីចំណុចនឹង c ស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត c និងកាំ r

សមីការស្វ៊ែរ **:** គេមាន $C(a, b, c)$ ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែរ ហើយ $P(x, y, z)$ ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែរ នោះគេបានសមីការស្វ៊ែរគឺ

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

ដែល r ជាកាំ។

សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ **:** សមីការបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(a, b, c)$ គឺ :

$(L): \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច : សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $P_0(x_0, y_0, z_0)$ និង $P_1(x_1, y_1, z_1)$ គឺ :

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ **:** សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $M_0(x_0, y_0, z_0)$ គឺ :

$x - x_0 = at \Leftrightarrow x = x_0 + at$

$y - y_0 = bt \Leftrightarrow y = y_0 + bt$

$z - z_0 = ct \Leftrightarrow z = z_0 + ct$

សមីការប្លង់ **:** សមីការប្លង់ដែលកំណត់ដោយចំណុច $P(x_0, y_0, z_0)$ និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(a, b, c)$ មានរាង $ax + by + cz + d = 0$ សំណុំចំណុច $Q(x, y, z)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $+ by + cz + d = ($ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិតហើយ a, b, c មិនសូន្យព្រមគ្នា) គឺជាប្លង់វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ ។

ស្វ៊ីត ចុះ : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះចេញពី n_0 លុះត្រាតែ $a_{n+1} \le a_n$ ចំពោះ $\forall n \ge n_0$ ។

ស្វ៊ីត ម៉ូណូតូន : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន បើ

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$

ឬ

$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$

ស្វ៊ីត ម៉ូណូតូន កើន : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន បើ

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$

ស្វ៊ីត ម៉ូណូតូនចុះ : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនចុះ បើ

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

ស្វ៊ីតទាល់លើ : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើលុះត្រាតែមានចំនួនពិត M ដែល $a_n \le M$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ហើយចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមលុះត្រាតែមានចំនួនពិត m ដែល $a_n \ge m$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ហើយចំនួន m ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ។

ស្វ៊ីតទាល់ : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់កាលណាស្វ៊ីត (a_n) ទាល់លើផងនិងទាល់ក្រោមផង ។

ស្វ៊ីតនព្វន្ត : គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយ ។

ស៊េរី : គឺជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីត ។

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ : គឺជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី 1) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q ដែល $q \ne 0$ ។

អ

អត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម : ផលធៀបរវាងបម្រែបម្រួលនៃអនុគមន៍និងបម្រែបម្រួលនៃអថេរ

អតិបរមាធៀប : តម្លៃនៃអនុគមន៍ដែលនៅត្រង់ចំណុចនោះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះប្តូរសញ្ញាពីបូកទៅដក ។

អប្បបរមាធៀប : តម្លៃនៃអនុគមន៍ដែលនៅត្រង់ចំណុចនោះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះប្តូរសញ្ញាពីដកទៅបូក ។

អនុគមន៍ប៊ីការេ : អនុគមន៍ដែលមានរាងទូទៅ $y = ax^4 + bx^2 + 2 \quad (a \ne 0)$

អត្ថិភាពឫស : ភាពដែលមានឬគ្មានឫសនៃសមីការមួយ ។

អថេរភាព : ភាពប្រែប្រួលនៃអនុគមន៍មួយ ។

អាស៊ីមតូត : បន្ទាត់មួយដែលមានចម្ងាយស្មើរតែសូន្យពីចំណុចនៃខ្សែកោង កាលណាចំណុចនោះរត់លើខ្សែកោងទៅឆ្ងាយអនន្ត ។