វិញ្ញាសារទី១

វិញ្ញាសារត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

រៀបរៀងដោយ៖ ហឿង សិរីវឌ្ឍន៍

1. គេអោយ $z = \dfrac{1+8i}{1-2i}$។
   - a. សរសេរ z ជាទម្រង់ $x + yi$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិត។
   - b. រកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ z ។
2. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖
   - a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$
   - b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x-1}$
   - c. $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - \ln(2e^x + 1)]$
3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖
   - a. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$
   - b. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+3x-18} dx$
   - c. $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$
4. គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$ ។
   - a. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' - 2y' + 5y = 0$។ រកចម្លើយនៃ (F) បើ $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 6$។
   - b. រកចំនួនពិត n, p និង q ដោយដឹងថា $y = 2x^2 + 3x + 1$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)។ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។
5. ក្នុងថង់មួយមានអក្សរ 10 តួ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$។គេចាប់យកអក្សរ 4 តួចេញពីថង់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។
   រកប្រូបាបដែល៖
   - a. គ្មានបានស្រៈមួយសោះ។
   - b. បានស្រៈតែមួយគត់។
   - c. បានស្រៈតែពីរគត់។
   - d. យ៉ាងតិចណាស់បានស្រៈមួយ។
6. គេអោយសមីការបន្ទាត់ $\dfrac{x-5}{5\lambda+2} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-1}{1}$ និង $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{2\lambda} = \dfrac{z-1}{3}$ ។
   សរសេរសមីការស្តង់ដានៃបន្ទាត់ទាំងពីរនេះបើគេដឹងថាបន្ទាត់ទាំងពីរកែងគ្នា។
7. គេអោយសមីការប្លង់ $\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+3 \\ -4 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$។
   សរសេរសមីការជាទម្រង់ស្តង់ដារួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចរបស់ប្លង់និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់នេះ។
8. គេអោយអនុគមន៍ $f(x) = x\ln x - x + 1$ មានក្រាបតំណាង (C) ។
   - a. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ។
   - b. គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។
   - c. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$។

① គេអោយ $z=\dfrac{1+8i}{1-2i}$

ⓐ សរសេរ z ជាទម្រង់ $x+yi$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិត។

យើងមាន

$$z=\frac{1+8i}{1-2i}=\frac{(1+8i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+10i-16}{1+4}=\frac{-15+10i}{5}=-3+2i$$

ដូចនេះ $z=-3+2i$ មានទម្រង់ $x+yi$ ដែល $x=-3$ និង $y=2$ ។

ⓑ រកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ z

+ រកម៉ូឌុល $|z|$

តាមរូបមន្ត $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

+ រកអាគុយម៉ង់

ដោយ $\begin{cases}\sin\theta &= \dfrac{2}{\sqrt{13}}\\ \cos\theta &= \dfrac{-3}{\sqrt{13}}\end{cases}$

នាំអោយ $\tan\theta=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{-3}{\sqrt{13}}}=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$

$$\Longrightarrow \theta=\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)=-\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុលនៃ z គឺ $|z|=\sqrt{13}$ ហើយអាគុយម៉ង់នៃ z គឺ $\theta=-\arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)$

② គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ⓐ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ មានរាង $\dfrac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-2\sin^2\frac{x}{2}}}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\ln e}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\times\frac{x^2}{4}}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$ មានរាង $\dfrac{0}{0}$

តាង $t=x-1 \implies x=t+1$

ដោយ $x\to0 \implies t\to0$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi(t+1)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+\pi t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{t}\\&=\lim_{t\to0}-\pi\times\frac{\sin\pi t}{\pi t}\\&=-\pi\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]$ មានរាង $(\infty-\infty)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]&=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x-\ln(2e^x+1)]\\&=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{2e^x+1}\\&=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^x+1}\\&=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(2+\frac{1}{e^x})}\\&=\ln\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

(a) $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$

$=\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ ព្រោះ $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$

$=-\displaystyle\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$

$=-\ln|\sin x+\cos x|+c, c\in\mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\int\frac{3x+5}{x^2+3x-18}dx$

តាង $\dfrac{3x+5}{x^2+3x-18}=\dfrac{A}{x+6}+\dfrac{B}{x-3}$

ដោយ $\dfrac{A}{x+6}+\dfrac{B}{x-3}=\dfrac{A(x-3)+B(x+6)}{(x+6)(x-3)}=\dfrac{(A+B)x+(-3A+6B)}{x^2+3x-18}$

យើងបាន $\begin{cases}A+B&=3\quad(1)\\-3A+6B&=5\quad(2)\end{cases}$

តាម (1) យក $A=3-B$ ជំនួសក្នុង (2)

តាម (2) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}-3(3-B)+6B&=5\\-9+3B+6B&=5\\9B&=14\\B&=\frac{14}{9}\end{aligned}$$

នាំអោយ $A = 3 - \frac{14}{9} = \frac{13}{9}$

នាំអោយ $\frac{3x+5}{x^2+3x-18} = \frac{\frac{13}{9}}{x+6} + \frac{\frac{14}{9}}{x-3}$

យើងបាន

$$\int \frac{3x+5}{x^2+3x-18}dx$$
$$= \int \left(\frac{\frac{13}{9}}{x+6} + \frac{\frac{14}{9}}{x-3}\right) dx$$
$$= \frac{13}{9}\int \frac{1}{x+6}dx + \frac{14}{9}\int \frac{1}{x-3}dx$$
$$= \frac{13}{9}\ln|x+6| + \frac{14}{9}\ln|x-3| + c, c \in \mathbb{R}$$

(c) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$

$$= \int \frac{1+2x+x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx$$
$$= \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx$$
$$= x + \ln|1+x^2| + c, c \in \mathbb{R}$$

(4) គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល$(E) : y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$ ។

(a) +ដោះស្រាយសមីការ$(F) : y'' - 2y' + 5y = 0$។

សមីការ$(F) : y'' - 2y' + 5y = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

យើងបាន $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times 1\times 5 = 4 - 20 = -16$

នាំអោយ $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

ដូចនេះ $y = (A\cos 2x + B\sin 2x)\, e^x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ(F) ដែលA, Bជាចំនួនថេរ។

+រកចម្លើយនៃ(F)បើ $y(0) = 2$ និង $y'(0) = 6$។

ដោយ $y = (A\cos 2x + B\sin 2x)\, e^x$

នាំអោយ

$$y' = (A\cos 2x + B\sin 2x)'\, e^x + (A\cos 2x + B\sin 2x)\,(e^x)'$$
$$y' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)e^x + (A\cos 2x + B\sin 2x)\, e^x$$
$$y' = (2B\cos 2x + A\cos 2x - 2A\sin 2x + B\sin 2x)e^x$$

យើងបាន $\begin{cases} y(0) &= 2 = A \\ y'(0) &= 6 = 2B + A \end{cases}$

$$\implies B = \frac{6-A}{2} = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ដូចនេះ $y = (2\cos 2x + 2\sin 2x)\, e^x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ(F)។

b +រកចំនួនពិត n,p និង q ដោយដឹងថា $y=2x^2+3x+1$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)។
ដោយដឹងថា $y=2x^2+3x+1$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)
យើងបាន $\begin{cases} y' &= 4x+3 \\ y'' &= 4 \end{cases}$
នាំអោយ

$$\begin{aligned} 4-2(4x+3)+5(2x^2+3x+1) &= nx^2+px+q \\ 4-8x-6+10x^2+15x+5 &= nx^2+px+q \\ 10x^2+7x+3 &= nx^2+px+q \end{aligned}$$

ដោយផ្ទឹមសមីការទាំងពីរយើងបាន $\begin{cases} n &= 10 \\ p &= 7 \\ q &= 3 \end{cases}$

+រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)
ចម្លើយនៃសមីការ(E) គឺ $y=y_p+y_c$តែ $\begin{cases} y_p &= (2\cos 2x+2\sin 2x)\,e^x \\ y_c &= 2x^2+3x+1 \end{cases}$
ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ(E) គឺ $y=(2\cos 2x+2\sin 2x)\,e^x+2x^2+3x+1$ ។

5 ក្នុងថង់មួយមានអក្សរ 10 តួ a,b,c,d,e,f,g,h,i,j។គេចាប់យកអក្សរ 4 តួចេញពីថង់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។
ករណីអាចគឺ

$$n(S)=C(10,4)=\frac{10!}{(10-4)!\times 4!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}=210 \text{ ករណី}$$

a គណនាប្រូបាបដែលចាប់គ្មានបានស្រៈមួយសោះ
តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ " ចាប់គ្មានបានស្រៈមួយសោះ "
ដោយក្នុងចំណោមអក្សរ10តួរមានស្រៈចំនួន3គឺ a,e,i និងមានព្យញ្ជនៈចំនួន7គឺ b,c,d,f,g,h,j
ដើម្បីចាប់គ្មានបានស្រៈមួយសោះ លុះត្រាតែចាប់អក្សរទាំង4នោះចេញពីព្យញ្ជនៈទាំង7
ករណីស្រេបគឺ

$$n(A)=C(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!\times 4!}=\frac{7!}{3!\times 4!}=\frac{7\times 6\times 5}{6}=35 \text{ ករណី}$$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{35}{210}$

b គណនាប្រូបាបដែលចាប់បានស្រៈតែមួយគត់
តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ " ចាប់បានស្រៈតែមួយគត់ "
ដើម្បីបានព្រឹត្តិការណ៍ B កាលណាចាប់យកស្រៈចំនួន1ចេញពីស្រៈទាំង3
ហើយចាប់យកព្យញ្ជនៈចំនួន3ទៀតចេញពីព្យញ្ជនៈទាំង7។
ចំនួនករណីស្រេបគឺ

$$n(B)=C(3,1)\times C(7,3)=\frac{3!}{(3-1)!\times 1!}\times\frac{7!}{(7-3)!\times 3!}=105 \text{ ករណី}$$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{105}{201}$

(c) គណនាប្រូបាបដែលចាប់បានស្រះតែពីរគត់

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ " ចាប់បានស្រះតែពីរគត់ "

ដើម្បីបានព្រឹត្តិការណ៍ C កាលណាចាប់យកស្រះចំនួន2ចេញពីស្រះទាំង3

ហើយចាប់យកព្យញ្ជនៈចំនួន2ទៀតចេញពីព្យញ្ជនៈទាំង7។

ចំនួនករណីស្របគឺ

$$n(C) = C(3,2) \times C(7,2) = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} \times \frac{7!}{(7-2)! \times 2!} = 63 \text{ ករណី}$$

ដូចនេះ $\quad P(B) = \dfrac{63}{201}$

(d) គណនាប្រូបាបដែលចាប់បានយ៉ាងតិចណាស់បានស្រះមួយ

ដោយព្រឹត្តិការណ៍នេះជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលផ្ទុយពីព្រឹត្តិការណ៍ A

យើងបាន $\quad P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{35}{210} = \dfrac{175}{210}$

ដូចនេះ $\quad P(A') = \dfrac{175}{210}$

(6) សរសេរសមីការស្តង់ដានៃបន្ទាត់ទាំងពីរនេះ

បន្ទាត់ទាំងពីរនេះកែងគ្នានោះមានន័យថាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរនេះក៏កែងគ្នាដែរ។

បន្ទាត់ $\dfrac{x-5}{5\lambda+2} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-1}{1}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (5\lambda+2, -5, 1)$

បន្ទាត់ $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{2\lambda} = \dfrac{z-1}{3}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{v} = (1, 2\lambda, 3)$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសទាំងពីរនេះកែងគ្នាកាលណា $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
& \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\
\iff & (5\lambda+2, -5, 1) \cdot (1, 2\lambda, 3) &= 0 \\
\iff & (5\lambda+2) \times 1 + (-5) \times 2\lambda + 1 \times 3 &= 0 \\
\iff & 5\lambda + 2 - 10\lambda + 3 &= 0 \\
\iff & -5\lambda + 5 &= 0 \\
\implies & \lambda &= 1
\end{aligned}$$

សមីការស្តង់ដានៃបន្ទាត់ទាំងពីរគឺ $\dfrac{x-5}{7} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-1}{1}$ និង $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ ។

(7) សរសេរសមីការជាទម្រង់ស្តង់ដារួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចរបស់ប្លង់និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់

គេអោយសមីការប្លង់ $\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+3 \\ -4 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{aligned}
\implies & (x-2)(0+16) - (y-5)(0-24) + (z+3)(8+24) &= 0 \\
\implies & 16(x-2) + 24(y-5) + 32(z+3) &= 0 \\
\implies & 2(x-2) + 3(y-5) + 4(z+3) &= 0
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\quad$ ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប្លង់គឺ $2(x-2) + 3(y-5) + 4(z+3) = 0$

ដែលមាន $(2, 5, -3)$ ជាចំនុចរបស់ប្លង់និង $(2, 3, 4)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់។

8 គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=x\ln x-x+1$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

a គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x-x+1)=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(x\ln x-x+1)=+\infty$$

b គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$ សិក្សាសញ្ញា$f'(x)$

ដោយ$f'(x)=\ln x$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះកាលណា $f'(x)<0 \iff \ln x<0 \implies x<1$

$f(x)$ ប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីសកាលណា $f'(x)=0 \iff \ln x=0 \implies x=1$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនកាលណា$f'(x)>0 \iff \ln x>0 \implies x>1$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

c +គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

ដោយ $f(x)=x\ln x-x+1 \implies f(1)=0$

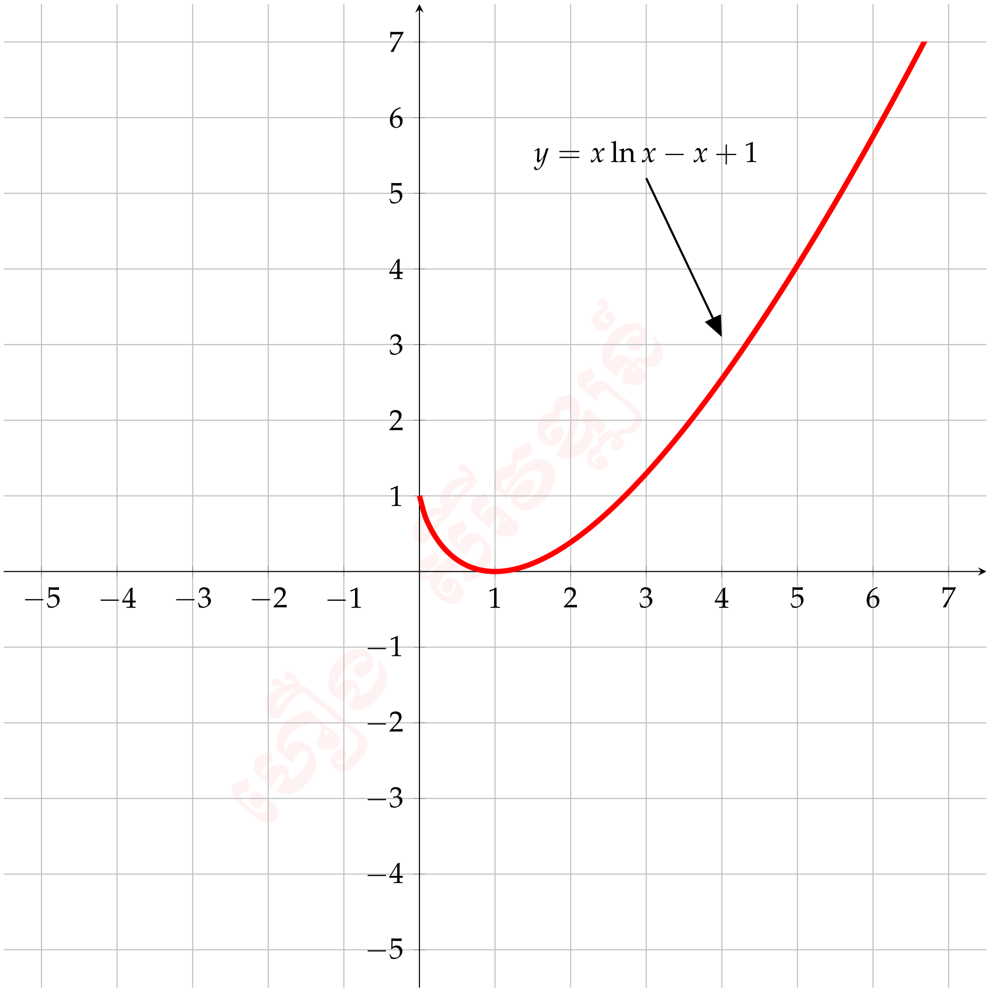
x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

+ សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់$(o, \vec{i}, \vec{j})$

☞តារាងតម្លៃលេខ

x	0	1	2.7
$f(x) = x\ln x - x + 1$	1	0	1

☞សំណង់ក្រាប



វិញ្ញាសារទី២

វិញ្ញាសារត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

រៀបរៀងដោយៈ ហៀង សិរីវឌ្ឍន៍

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-\sqrt{18-x}}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

(a) $\displaystyle\int\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{6x+3}{4x^2-4x+1}dx$ (c) $\displaystyle\int x^2\ln x dx$

3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i, z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ និង $v=\dfrac{-(\sqrt{3}+1)}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$ ។

(a) សរសេរz_1និងz_2ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

(b) គណនាកន្សោម A ដែល $A=v+z_1+{z_1}^2$ ។

(c) គណនាwដែល$w={z_1}^{120}+{z_2}^{120}$ ។

4. (a) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-y=0$ ។

(b) កំណត់ចម្លើយf នៃសមីការ(E)បើគេដឹងថាក្រាបរបស់វាកាត់អ័ក្ស(Oy)ត្រង់$y=4$ ហើយសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះស្របនឹងបន្ទាត់$(D): y=2x-2$។

5. សរសេរសមីការខាងក្រោមជាទម្រង់ស្តង់ដារួចរកធាតុនីមួយៗរបស់វា៖

(a) សមីការប៉ារ៉ាបូល : $y=2x^2-36x+165$

(b) សមីការអ៊ីពែបូល : $49x^2=16y^2+784$

(c) សមីការរង្វង់: $x^2+y^2-14x+4y=-44$

(d) សមីការអេលីប: $64x^2+25y^2=1600$

6. គេឱ្យ $\vec{u}=\left(\frac{8}{9},\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right)$ និង $\vec{v}=\left(\frac{1}{9},\frac{8}{9},-\frac{4}{9}\right)$ ។

(a) បង្ហាញថា$\vec{u}$និង$\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានិងអរតូកូណាល់គ្នា។

(b) កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ$\vec{w}$ដែល$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ ។

7. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-1$ ដោយ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ និងមានក្រាប C។

(a) គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ រួចរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C។

(b) កំណត់តម្លៃ a,b,c ដើម្បីអោយ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$។
គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$។

(c) គណនាតម្លៃបរមាធៀបនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាព។

(d) បង្ហាញថាចំណុច $I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C រួចសង់ក្រាប C ។

(e) គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃផ្នែកប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប C និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់$x=2$ និង $x=4$។

① គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ⓐ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-\sqrt{18-x}}{x-2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{4-\sqrt{18-x}}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(4-\sqrt{18-x})(4+\sqrt{18-x})}{(x-2)(4+\sqrt{18-x})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{4^2-(\sqrt{18-x})^2}{(x-2)(4+\sqrt{18-x})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{16-18+x}{(x-2)(4+\sqrt{18-x})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(4+\sqrt{18-x})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(4+\sqrt{18-x})}\\
&= \frac{1}{4+\sqrt{18-2}}\\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

ⓑ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាង $t=\dfrac{\pi}{2}-x \implies x=\dfrac{\pi}{2}-t$

បើ $x\to\dfrac{\pi}{2} \implies t\to 0$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} &= \lim_{t\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{(1+\cos x)\sin t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{(1+\cos t)\sin t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{(1+\cos t)\sin t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{t}{1+\cos t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t}{1+\cos t}\\
&= \frac{0}{2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} &= \lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x^3}}{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\quad \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}=\frac{1}{3}$

(2) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

(a) $\int\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$

$$\begin{aligned}&= \int\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{d(1+\sin 2x)}{1+\sin 2x}\\ &= \frac{1}{2}\ln|1+\sin 2x|+c, c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\quad \int\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\ln|1+\sin 2x|+c, c\in\mathbb{R}$

(b) $\int\frac{6x+3}{4x^2-4x+1}dx$

តាង $\quad \frac{6x+3}{4x^2-4x+1}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}$

ដោយ $\quad \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}=\frac{A(2x-1)+B}{(2x-1)^2}=\frac{2Ax-A+B}{(2x-1)^2}=\frac{2Ax-(A-B)}{(2x-1)^2}$

យើងបាន $\begin{cases}2A &= 6\\ A-B &= -3\end{cases} \implies \begin{cases}A &= 3\\ B &= 6\end{cases}$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}\int\frac{6x+3}{4x^2-4x+1}dx &= \int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{6}{(2x-1)^2}\right)dx\\ &= \int\frac{3}{2x-1}dx+\int\frac{6}{(2x-1)^2}dx\\ &= \frac{3}{2}\int\frac{d(2x-1)}{2x-1}-3\int d\left(\frac{1}{2x-1}\right)\\ &= \frac{3}{2}\ln|2x-1|-\frac{3}{2x-1}+c, c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\quad \int\frac{6x+3}{4x^2-4x+1}dx=\frac{3}{2}\ln|2x-1|-\frac{3}{2x-1}+c, c\in\mathbb{R}$

(c) $\int x^2 \ln x dx$

តាង $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^2 dx \implies v = \frac{1}{3}x^3$ យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + c, c \in \mathbb{R}$

(3) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ និង $v = \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$ ។

(a) សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$+\ z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})$

$+\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ $z_1 = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})$ និង $z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ ។

(b) គណនាកន្សោម A

$$\begin{aligned}A &= v + z_1 + {z_1}^2 \\ &= \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}i\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

ដូចនេះ $A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

(c) គណនា w

ដោយ $w = {z_1}^{120} + {z_2}^{120}$

តែ $\begin{cases} z_1 &= \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}) \\ z_2 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$

$\implies \begin{cases} {z_1}^{120} &= \cos(-\frac{\pi}{6} \times 120) + i\sin(-\frac{\pi}{6} \times 120) \\ {z_2}^{120} &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 120\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} \times 120\right) \end{cases}$

$\implies \begin{cases} {z_1}^{120} &= \cos(-20\pi) + i\sin(-20\pi) \\ {z_2}^{120} &= \cos 20\pi + i\sin 20\pi \end{cases}$

ដោយ n ជាចំនួនគូ $\Longrightarrow \begin{cases} \cos n\pi &= 1 \\ \sin n\pi &= 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} {z_1}^{120} &= 1 \\ {z_2}^{120} &= 1 \end{cases}$

យើងបាន $w = 1 + 1 = 2$

ដូចនេះ $\quad w = 2$ ។

4 a ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - y = 0$

$(E): y'' - y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$

ដូចនេះ $\quad y = f(x) = Ae^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)។

b កំណត់ចម្លើយf នៃសមីការ(E)

ដោយដឹងថាក្រាបរបស់វាកាត់អ័ក្ស(Oy)ត្រង់$y = 4$ មានន័យថា $f(0) = 4$

យើងបាន $\quad f(0) = A + B = 4 \quad (1)$

ហើយសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនោះស្របនឹងបន្ទាត់$(D): y = 2x - 2$

មានន័យថា $\quad f'(0) = 2$ (មេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា)

ដោយ $\quad f'(x) = Ae^x - Be^{-x}$

$\implies f'(0) = A - B = 2 \implies A = 2 + B \quad (2)$

យក $A = 2 + B$ជំនួសក្នុងសមីការ $(1) \implies 2 + B + B = 4 \implies B = 1$

យក $B = 1$ជំនួសក្នុងសមីការ$(2) \implies A = 3$

ដូចនេះ $\quad y = 3e^x + e^{-x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ(E) ។

5 សរសេរសមីការខាងក្រោមជាទម្រង់ស្តង់ដារួចរកធាតុនីមួយៗរបស់វា៖

a យើងមានសមីការប៉ារ៉ាបូល៖

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 36x + 165 \\ \Longrightarrow \quad y &= 2(x^2 - 18x + 81) - 162 + 165 \\ \Longrightarrow \quad y &= 2(x-9)^2 + 3 \\ \Longrightarrow \quad (x-9)^2 &= \frac{1}{2}(y-3) \\ \Longrightarrow \quad (x-9)^2 &= 4 \times \frac{1}{8}(y-3) \end{aligned}$$

+ សមីការស្តង់ដារាង $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ មានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

+ កំពូល $V(h,k) = V(9,3)$

+ កំណុំ $F(h, k+p) = F\left(9, 3 + \frac{1}{8}\right) = F\left(9, \frac{25}{8}\right)$

+ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y = k - p = 3 - \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$

+ អ័ក្សឆ្លុះ $x = h = 9$

(b) យើងមានសមីការអ៊ីពែបូល៖

$$
\begin{aligned}
& 49x^2 &&= 16y^2 + 784 \\
\Longrightarrow\ & 49x^2 - 16y^2 &&= 784 \\
\Longrightarrow\ & \frac{49x^2 - 16y^2}{784} &&= 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{49x^2}{784} - \frac{16y^2}{784} &&= 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{x^2}{\frac{784}{49}} - \frac{y^2}{\frac{784}{16}} &&= 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{x^2}{\left(\frac{28}{7}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{28}{4}\right)^2} &&= 1
\end{aligned}
$$

+ សមីការស្តង់ដារាង $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ មានអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សដេក

+ ផ្ចិត $I(h,k) = I(0,0)$

+ កំពូល $V_1(h-a,k) = V_1(-\frac{28}{7},0)$ និង $V_2(h+a,k) = V_2(\frac{28}{7},0)$

+ ដោយ $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{784}{49} + \frac{784}{16}} = \sqrt{65} = 8.06$

$\Longrightarrow$ កំណុំ $F_1(h-c,k) = F_1(-8.06,0)$និង $F_2(h+c,k) = F_2(8.06,0)$

+ សមីការអាស៊ីមតូត $y_1 = k - \frac{b}{a}(x-h) = -\frac{7}{4}x$ និង $y_2 = k + \frac{b}{a}(x-h) = \frac{7}{4}x$

(c) យើងមានសមីការរង្វង់៖

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 - 14x + 4y &&= -44 \\
\Longrightarrow\ & x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4 &&= -44 + 49 + 4 \\
\Longrightarrow\ & (x-7)^2 + (y+2)^2 &&= 9 \\
\Longrightarrow\ & (x-7)^2 + (y+2)^2 &&= 3^2
\end{aligned}
$$

+ សមីការស្តង់ដារាង $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

+ ផ្ចិតរង្វង់ $I(h,k) = I(7,-2)$

+ កាំរង្វង់ $R = 3$ ឯកតាប្រវែង

(d) យើងមានសមីការអេលីប៖

$$
\begin{aligned}
& 64x^2 + 25y^2 &&= 1600 \\
\Longrightarrow\ & \frac{64x^2 + 25y^2}{1600} &&= 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{64x^2}{1600} + \frac{25y^2}{1600} &&= 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{x^2}{\frac{1600}{64}} + \frac{y^2}{\frac{1600}{25}} &&= 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} &&= 1 \\
\Longrightarrow\ & \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{8^2} &&= 1
\end{aligned}
$$

+ សមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែល $a>b>0$
និង $c^2=a^2-b^2=64-25=39 \implies c=\sqrt{39}=6.25$
+ ផ្ចិត $I(h,k)=I(0,0)$
+ កំពូល $V_1(h,k-a)=V_1(0,-8)$ និង $V_2(h,k+a)=V_2(0,8)$
+ កំណុំ $F_1(h,k-c)=F_1(0,-6.25)$ និង $F_2(h,k+c)=F_2(0,6.25)$
+ ប្រវែងអ័ក្សធំស្មើ $2a=2\times 8=16$ ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើ $2b=2\times 5=10$

6 គេឱ្យ $\overrightarrow{u}=\left(\frac{8}{9},\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right)$ និង $\overrightarrow{v}=\left(\frac{1}{9},\frac{8}{9},-\frac{4}{9}\right)$ ។

a បង្ហាញថា $\overrightarrow{u}$ និង $\overrightarrow{v}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានិងអរតូកូណាល់គ្នា

+ $\overrightarrow{u}$ និង $\overrightarrow{v}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតាកាលណា $|\overrightarrow{u}|=1$ និង $|\overrightarrow{v}|=1$

យើងមាន
$$\begin{cases}\overrightarrow{u}=\left(\frac{8}{9},\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right) \implies |\overrightarrow{u}|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1\\ \overrightarrow{v}=\left(\frac{1}{9},\frac{8}{9},-\frac{4}{9}\right) \implies |\overrightarrow{v}|=\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1\end{cases}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{u}$ និង $\overrightarrow{v}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា។

+ $\overrightarrow{u}$ និង $\overrightarrow{v}$ អរតូកូណាល់គ្នាកាលណា $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

យើងបាន $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{8}{49}+\frac{8}{49}-\frac{16}{49}=\frac{16}{49}-\frac{16}{49}=0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{u}$ និង $\overrightarrow{v}$ អរតូកូណាល់គ្នា។

b កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{w}$

ដោយ $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w}&=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\\ &=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ \frac{8}{9}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\\ \frac{1}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\end{vmatrix}\\ &=\left(-\frac{4}{81}-\frac{32}{81}\right)\overrightarrow{i}-\left(-\frac{32}{81}-\frac{4}{81}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{64}{81}-\frac{1}{81}\right)\overrightarrow{k}\\ &=-\frac{36}{81}\overrightarrow{i}+\frac{36}{81}\overrightarrow{j}+\frac{63}{81}\overrightarrow{k}\\ &=-\frac{4}{9}\overrightarrow{i}+\frac{4}{9}\overrightarrow{j}+\frac{7}{9}\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{w}=\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$

(7) គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-1$ ដោយ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ និងមានក្រាប C។

(a) +គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\infty$$

\+ អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \implies x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

ដោយ $\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=0 \implies y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

\+ កំណត់តម្លៃ a,b,c ដើម្បីអោយ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$។

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$

នាំអោយ $\begin{cases} a &=1\\ b &=0\\ c &=1\end{cases}$

\+ គណនា $f'(x)$

ដោយ $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1} \implies f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$

\+ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$ដោយ$(x-1)^2>0,\forall x\in\mathbb{D}$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $(x-1)^2-1$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} (x-1)^2-1 &=0\\ \implies (x-1-1)(x-1+1) &=0\\ \implies (x-2)x &=0\\ \implies x_1 &=0, x_2=2\end{aligned}$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

(b) +គណនាតម្លៃបរមាធៀបនៃ f

តាមតារាងសញ្ញា$f'(x)$យើងឃើញថា៖

$f'(x)$ប្តូរសញ្ញាពី$(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=0$

នោះ f មានអតិបរមាត្រង់ $x=0$ គឺ$f(0)=-1$

$f'(x)$ប្តូរសញ្ញាពី$(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=2$

នោះ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=2$ គឺ$f(2)=3$

+គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

ⓒ +បង្ហាញថាចំណុច $I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C រួចសង់ក្រាប C

ចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C កាលណា $f(2a-x)+f(x)=2b$

យើងមាន $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}, \quad I(1,1)$

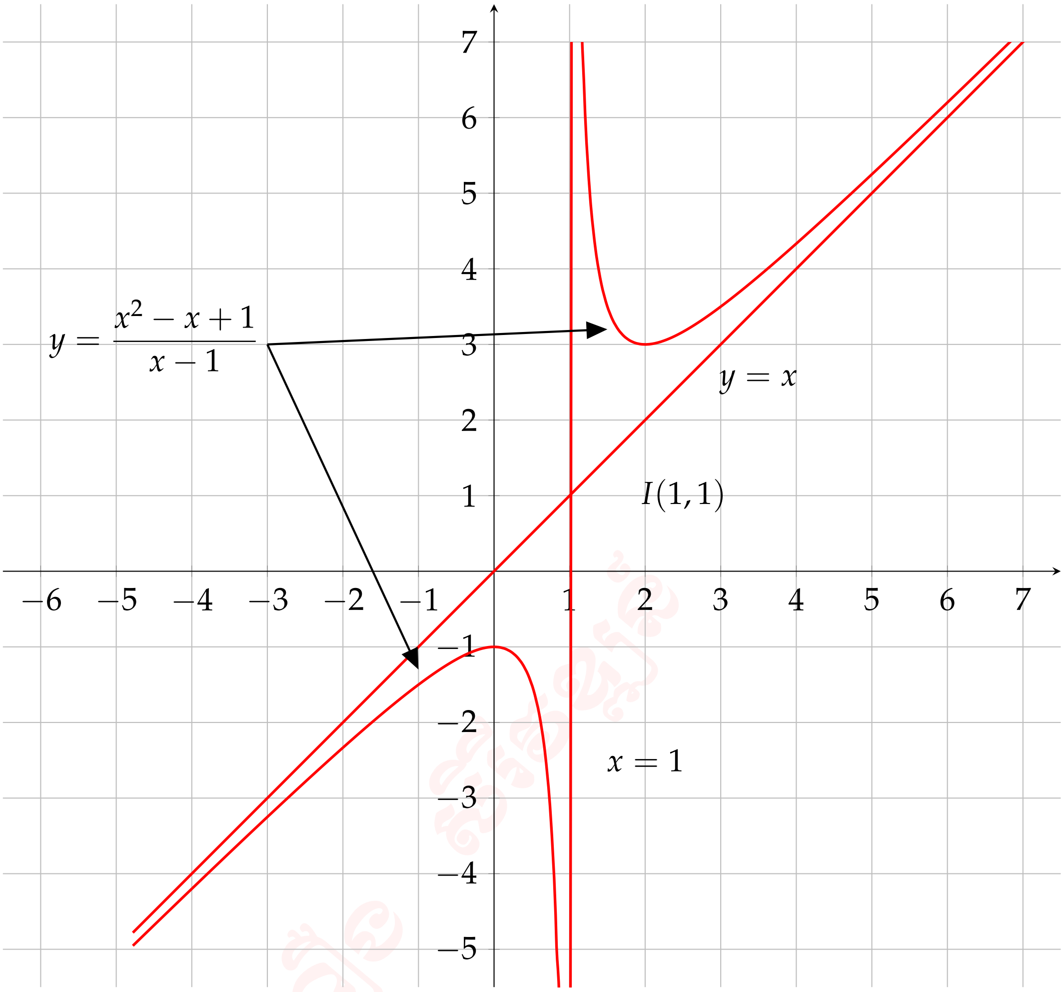
នាំអោយ

$$\begin{aligned} f(2a-x)+f(x) &= f(2-x)+f(x) \\ &= 2-x+\frac{1}{2-x-1}+x+\frac{1}{x-1} \\ &= 2+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-1} \\ &= 2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1} \\ &= 2 \\ &= 2b \end{aligned}$$

ដោយ $f(2-x)+f(x)=2$

ដូចនេះ $\quad I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C) ។

+សង់ក្រាប (C)



d គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃផ្នែកប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ $x = 2$ និង $x = 4$

តាមរូបមន្ត $S = |\int_a^b f(x)dx|$

យើងបាន៖

$$
\begin{aligned}
S &= |\int_2^4 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx| \\
&= |\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x - 1} dx \right)| \\
&= |\left[\frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| \right]_2^4| \\
&= |\left(\frac{4^2}{2} + \ln|4 - 1| \right) - \left(\frac{2^2}{2} + \ln|2 - 1| \right)| \\
&= |8 + \ln 3 - 2 - 0| \\
&= |6 + \ln 3| \\
&= 6 + \ln 3
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃនៃផ្នែកប្លង់មានចំនួន $6 + \ln 3$ ឯកតាផ្ទៃ។

វិញ្ញាសារត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

រៀបរៀងដោយ៖ ហៀង សិរីវឌ្ឍន៍

1. បើ $(x+iy)^3 = u+iv$ នោះបង្ហាញថា $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=4(x^2-y^2)$ ។
2. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

   a $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$ b $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ c $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$
3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

   a $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$ b $\int\left(x^2-2x+\frac{\ln x}{x}\right)dx$ c $\int\left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx$
4. a ដោះស្រាយសមីការ $2y''-3y'+y=0 \quad (E)$

   b កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E) ដើម្បីឲ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y=-\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ។
5. នៅក្នុងប្រអប់ A មានសៀវភៅពីជគណិត 3 ក្បាល និងសៀវភៅធរណីមាត្រ 4 ក្បាល ហើយប្រអប់ B មាន
   សៀវភៅពីជគណិត 5 ក្បាល និងធរណីមាត្រ 3 ក្បាល ។គេចាប់យកសៀវភៅ 1 ពីប្រអប់ A ដាក់ចូលប្រអប់ B ហើយចាប់យកសៀវភៅ 1 ពីប្រអប់ B ដាក់ចូលក្នុងប្រអប់ A វិញ។
   រកប្រូបាបដែលចំនួនសៀវភៅទាំងពីជគណិត និង ធរណីមាត្រនៅក្នុងប្រអប់ទាំងពីមិនប្រែប្រួល។
6. ក្នុង តម្រុយ អរ តូ ណ រម៉ាល់ មាន ទិ ស ដៅ វិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេ ឲ្យចំណុច $A(0,2,0), B(1,0,0)$ និង $C(0,0,3)$ ។

   a រកវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។

   b រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមគល់ O ហើយស្របនឹងប្លង់នៃត្រីកោណ ABC ។

   c គណនា $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OB}$ ។ទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ និងចម្ងាយពីកំពូល O មកប្លង់ ABC ។
7. គេឲ្យ $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។គេតាង (C)ជាក្រាបរបស់វា។

   a គណនា $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។

   b បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D: y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C) ។

   c សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ f ។

   d សិក្សាទីតាំងខ្សែកោង (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ D ។

   e A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ A ។

   f សង់ក្រាបរួចបង្ហាញថា $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។

① បង្ហាញថា $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=4(x^2-y^2)$ ។

ដោយ $(x+iy)^3=u+iv$

$$\begin{aligned}(x+iy)^3 &= x^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+(iy)^3\\ &= x^3+3x^2yi+3xy^2i^2+y^3i^3\\ &= x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i\\ &= (x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i\end{aligned}$$

យើងបាន $\begin{cases} u &= x^3-3xy^2\\ v &= 3x^2y-y^3\end{cases}$

នាំឲ្យ

$$\begin{aligned}\frac{u}{x}+\frac{v}{y} &= \frac{x^3-3xy^2}{x}+\frac{3x^2y-y^3}{y}\\ &= x^2-3y^2+3x^2-y^2\\ &= 4x^2-4y^2\\ &= 4(x^2-y^2)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=4(x^2-y^2)$

② គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ⓐ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(8x^3+36x^2+54x+27)(9x^2-12x+4)}{x^5+5}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{8x^3\times 9x^2}{x^5}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{72x^5}{x^5}\\ &= 72\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}=72$

ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^{2x}}\\ &= 1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$

c $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-2\cos^2 x+1}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^2 x+\cos x+1}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(-2\cos x-1)}{-(\cos x-1)}\\ &= \lim_{x\to 0}(2\cos x+1)\\ &= 3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}=3$

3 គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

a $\displaystyle\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$

តាង $u=x+\cos x \quad\Longrightarrow\quad du=(1-\sin x)dx$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx &= \int\frac{du}{u}\\ &= \ln|u|+c\\ &= \ln|x+\cos x|+c\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\quad \displaystyle\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=\ln|x+\cos x|+c, c\in\mathbb{R}$។

b $\displaystyle\int\left(x^2-2x+\frac{\ln x}{x}\right)dx$

$$\begin{aligned}&= \int\left(x^2-2x\right)dx+\int\frac{\ln x}{x}dx\\ &= \int(\ln x)'\ln x\,dx+\frac{x^3}{3}-x^2+c\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\ln^2 x\right)'dx+\frac{x^3}{3}-x^2+c\\ &= \frac{\ln^2 x}{x}+\frac{x^3}{3}-x^2+c\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\quad \displaystyle\int\left(x^2-2x+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{x^3}{3}-x^2+c, c\in\mathbb{R}$។

c $\displaystyle\int\left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx$

តាង $\begin{cases} u &= x^2-2x+5 \quad\Longrightarrow\quad du = (2x-2)dx\\ dv &= e^{-x}dx \quad\Longrightarrow\quad v = \displaystyle\int e^{-x}dx=-e^{-x}+c\end{cases}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int\left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx &= -e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)+\int(2x-2)e^{-x}dx\\ &= -e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)-2\int e^{-x}dx+2\int xe^{-x}dx\\ &= -e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)+2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx\end{aligned}$$

តាង $\begin{cases} t &= x \implies dt = dx \\ ds &= e^{-x}dx \implies s = \int e^{-x}dx = -e^{-x}+c \end{cases}$

តាមរូបមន្ត $\int tds = ts - \int sdt$

$\implies \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx &= -e^{-x}\left(x^2-2x+5\right) + 2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right) + c \\ &= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 5e^{-x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c \\ &= -x^2e^{-x} - 5e^{-x} + c \\ &= -\frac{x^2}{e^x} - \frac{5}{e^x} + c \\ &= -\frac{x^2+5}{e^x} + c \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\int \left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx = -\frac{x^2+5}{e^x} + c, c \in \mathbb{R}$

4 a ដោះស្រាយសមីការ $2y'' - 3y' + y = 0 \quad (E)$

(E)មានសមីការសម្គាល់: $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $y = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x}, A, B \in \mathbb{R}$

b កំណត់ចម្លើយ g មួយរបស់សមីការ (E)

ដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $g(x) = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x}$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = -\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$

នាំឲ្យ $\begin{cases} g(0) &= 0 \\ g'(0) &= -\frac{1}{2} \end{cases}$

ដោយ $y = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x} \implies y' = Ae^x + \frac{1}{2}Be^{\frac{1}{2}x}$

យើងបាន $\begin{cases} g(0) &= Ae^0 + Be^0 = A + B = 0 \quad (1) \\ g'(0) &= A + \frac{1}{2}B = -\frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$

តាមសមីការ (1) យក $A = -B$ ជំនួសក្នុងសមីការ (2)

យើងបាន $-B + \frac{1}{2}B = -\frac{1}{2} \implies -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2} \implies B = 1$

ដោយ $A = -B \implies A = -1$

ដូចនេះ $g(x) = -e^x + e^{\frac{1}{2}x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E)

⑤ រកប្រូបាបដែលចំនួនសៀវភៅទាំងពីជគណិត និង ធរណីមាត្រនៅក្នុងប្រអប់ទាំងពីរមិនប្រែប្រួល

តាង T ជាព្រឹត្តិការណ៍: "ចំនួនសៀវភៅទាំងពីជគណិត និង ធរណីមាត្រនៅក្នុងប្រអប់ទាំងពីរមិនប្រែប្រួល"

ដើម្បីឲ្យបានព្រឹត្តិការណ៍នេះលុះត្រាតែសៀវភៅដែលចាប់ចេញពីប្រអប់ទាំងពីរនេះជាសៀវភៅដូចគ្នា

មានន័យថាបើចាប់បានសៀវភៅពីជគណិតពីប្រអប់A នោះត្រូវតែចាប់បានសៀវភៅពីជគណិតពីប្រអប់B ដែរ ឬ បើចាប់បានសៀវភៅធរណីមាត្រពីប្រអប់A នោះត្រូវតែចាប់បានសៀវភៅធរណីមាត្រពីប្រអប់B ដែរ។

យើងបាន

$$P(T) = \frac{C(3,1)}{C(7,1)} \times \frac{C(5,1)}{C(8,1)} + \frac{C(4,1)}{C(7,1)} \times \frac{C(3,1)}{C(8,1)} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{56} + \frac{12}{56} = \frac{27}{56}$$

ដូចនេះ $P(T) = \dfrac{27}{56}$

⑥ ⓐ +រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$

គេឲ្យចំណុច$A(0,2,0), B(1,0,0)$ និង $C(0,0,3)$

យើងបាន៖

$\overrightarrow{CA} = (0-0, 2-0, 0-3) = (0,2,-3)$

$\overrightarrow{CB} = (1-0, 0-0, 0-3) = (1,0,-3)$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{n} = (-6,-3,-2)$

+គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S = \dfrac{|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{n}|}{2}$

$$S = \frac{|\sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (-2)^2}|}{2} = \frac{|\sqrt{36+9+4}|}{2} = \frac{|\sqrt{49}|}{2} = \frac{|7|}{2} = \frac{7}{2}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណABC គឺ $\frac{7}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

ⓑ រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមគល់ $O(0,0,0)$ ហើយស្របនឹងប្លង់នៃត្រីកោណ ABC

ដោយប្លង់ (P) ស្របនឹងប្លង់នៃត្រីកោណ ABC នោះ $\overrightarrow{n}(-6,-3,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

សមីការស្តង់ដានៃប្លង់គឺ $(P): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

ដែល (a,b,c) ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់និង (x_0,y_0,z_0) ជាចំណុចដែលកាត់ប្លង់ (P)

យើងបាន $(P): -6(x-0) - 3(y-0) - 2(z-0) = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (P) គឺ $(P): -6x - 3y - 2z = 0$

(c) គណនា $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}=(0,2,0)$
$\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$
$\overrightarrow{OC}=(0,0,3)$

យើងបាន $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=6\overrightarrow{i}-0\overrightarrow{j}+0\overrightarrow{k}=(6,0,0)$

នាំឲ្យ $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=6\cdot1+0\cdot0+0\cdot0=6$

ដូចនេះ $\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=6$

ទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ និងចម្ងាយពីកំពូល O មកប្លង់ ABC

+មាឌចតុមុខ $OABC=\dfrac{|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OB}|}{6}=\dfrac{|6|}{6}=1$ ឯកតាមាឌ

+រកចម្ងាយពីកំពូល O មកប្លង់ ABC

តាង h ជាចម្ងាយពី O មកប្លង់ ABC

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}\times h \implies h=\dfrac{2V}{S_{ABC}}$

ដោយ $S_{ABC}=\dfrac{7}{2}$ឯកតាផ្ទៃ $V_{OABC}=1$ ឯកតាមាឌ

យើងបាន $h=\dfrac{2\times1}{\frac{7}{2}}=\dfrac{2\times2}{7}=\dfrac{4}{7}$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ $V_{OABC}=1$ ឯកតាមាឌ និងចម្ងាយពី O មកប្លង់ ABCមានប្រវែង $\dfrac{4}{7}$ ឯកតាប្រវែង។

(7) គេឲ្យ $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$។គេតាង (C)ជាក្រាបរបស់វា។

(a) គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-x-2e^{-x}\right)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-x-2e^{-x}\right)=-\infty$

(b) បង្ហាញថាបន្ទាត់$D:y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(4-x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2e^{-x})=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់$D:y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង(C) ខាង$x\to+\infty$ ។

ⓒ សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ f

យើងមាន $f(x)=4-x-2e^{-x} \implies f'(x)=-1+2e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \implies -1+2e^{-x} &= 0 \\ \implies 2e^{-x} &= 1 \\ \implies e^{-x} &= \frac{1}{2} \\ \implies x &= -\ln\frac{1}{2} \end{aligned}$$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$		$-\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3+\ln\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី$(+)$ ទៅ$(-)$ ត្រង់ $x=-\ln\frac{1}{2}$

នោះ f មានអតិបរមាត្រង់$x=-\ln\frac{1}{2}$ និង $f(-\ln\frac{1}{2})=3+\ln\frac{1}{2}$ ។

ⓓ សិក្សាទីតាំងខ្សែកោង (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ D

យើងមាន $(C): y=4-x-2e^{-x}$ និង $D: y=4-x$

$\implies (C)-(D)=-2e^{-x}<0$

ដោយ $(C)-(D)<0$ ឬ $(C)<(D)$ នោះមានន័យថា ខ្សែកោង(C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (D) ។

ⓔ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ A ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយA មានអាប់ស៊ីស 0ជាចំណុចប៉ះរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់

យើងបាន $\begin{cases} y_0 &= f(0)=2 \\ f'(0) &= 1 \end{cases}$

នោះសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=1(x-0)+2=x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង(C)គឺ $y=x+2$

ⓕ សង់ក្រាប

+ ក្រាបកាត់អ័ក្សOy ត្រង់ $f(0)=2$

+ក្រាបកាត់អ័ក្សOx ត្រង់ $f(x)=0 \iff 4-x-2e^{-x}=0 \implies x_1=-0.895, x_2=3.961$

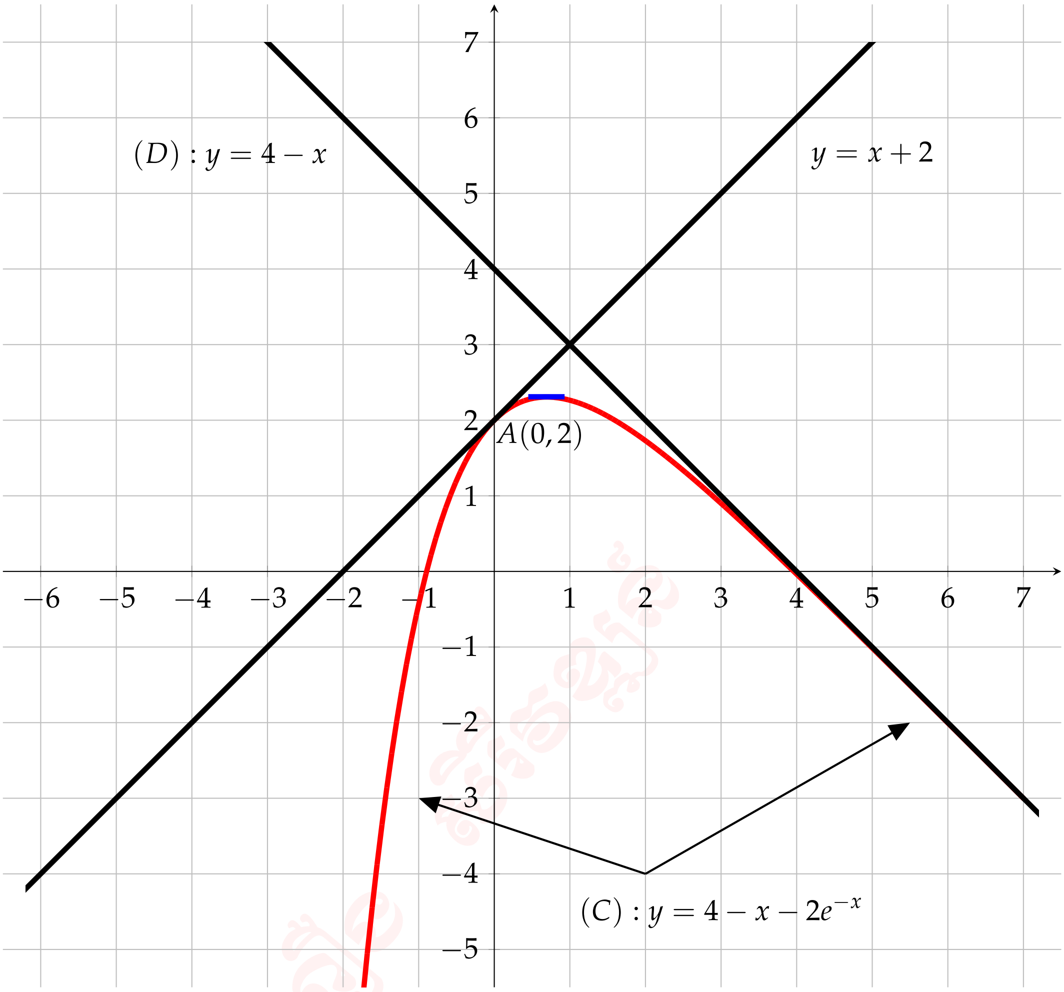
តារាងតម្លៃលេខ

☞អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=4-x$

x	0	4
$y=4-x$	4	0

☞ បន្ទាត់ប៉ះ $y = x + 2$

x	0	-2
y	2	0



+បង្ហាញថា $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$ ហើយ $f(a) \cdot f(b) < 0$

នោះយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៅចន្លោះ $[a, b]$ ដែល $f(c) = 0$

យើងបាន$\begin{cases} f(-1) & = 4 + 1 - 2e^1 = 5 - 2e \\ f(0) & = 2 \end{cases}$

$\implies f(-1) \cdot f(0) = 2(5 - 2e) = 10 - 4e < 0$

ដោយ $f(-1) \cdot f(0) = 10 - 4e < 0$

ដូចនេះ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$

វិញ្ញាសារទី៤

វិញ្ញាសារត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

រៀបរៀងដោយៈ ហៀង សិរីវឌ្ឍន៍

1. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 3 + i$ និង $w = 1 - i$ ។
   - a. ចូរគណនា $z + w, z - w, z \times w$ និង $\frac{z}{w}$ ហើយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។
   - b. ចូរកំណត់ចំនួនពិតពីរ α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\alpha z + \beta w = 2zw$ ។
2. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖
   - a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{x}$ b. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{3 - 4\sin^2 x}{2\cos x - 1}$ c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{\sin x}$
3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖
   - a. $\int \sin 2x \cdot \sin 4x dx$ b. $\int x^3 \ln x dx$ c. $\int \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2} dx$
4. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y' + 2y = 2x^2 + 10x + 12$ ។
   - a. ចូរកំណត់អនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី២ $g(x)$ ដែលជាចម្លើយនៃសមីការ។
   - b. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $y = f(x) - g(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ$(E') : y' + 2y = 0$ ។
   - c. ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E) ។
5. ចូររកសមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1, -1, 2)$ ហើយប៉ះទៅនឹងប្លង់ $(P) : x + 2y + 2z - 12 = 0$ ត្រង់ A ដែល $x_A = 2, y_A = 1$ ។
6. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច $A(-2, 3, 4), B(-5, 7, 7)$ និង $C(7, 7, 3)$
   - a. ចូរគណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថាចំណុចទាំងបី A, B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា។
   - b. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC រួចសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។
   - c. ចូរគណនាមាឌតេត្រាអែត $(OABC)$ ។
7. គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = (1 - x)(e^{2x} + 1)$ កំណត់លើ$\mathbb{R}$ ។
   - a. ចូរគណនា $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ។
   - b. ចូរគណនា$f'(x)$ និង $f''(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ$f'(x)$ ។
   - c. ចូរកំណត់សញ្ញានៃ$f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ$f(x)$ ។
   - d. បង្ហាញថា$(d) : y = 1 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ(C)កាលណា$x \to -\infty$។ បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាង(d) និង (C)។
   - e. សរសេរសមីការបន្ទាត់(T) ប៉ះខ្សែកោង(C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់(d)។
   - f. កំណត់ចំណុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) រួចសង់ក្រាប $(C), (T)$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

1 គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=3+i$ និង $w=1-i$ ។

a គណនា $z+w, z-w, z\times w$ និង $\frac{z}{w}$ ហើយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន៖

$$z+w=3+i+1-i=4+0i$$
$$z-w=3+i-(1-i)=3+i-1+i=2+2i$$
$$z\times w=(3+i)(1-i)=3-3i+i-i^2=3+1-2i=4-2i$$
$$\frac{z}{w}=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{1-i^2}=\frac{3+3i+i+i^2}{1+1}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

b កំណត់ចំនួនពិតពីរ α និង β

ដោយα និង βផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\alpha z+\beta w=2zw$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\alpha z+\beta w &= 2zw\\ \alpha(3+i)+\beta(1-i) &= 2(4-2i)\\ 3\alpha+i\alpha+\beta-i\beta &= 8-4i\\ (3\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)i &= 8-4i\end{aligned}$$

នាំឲ្យ $\begin{cases}3\alpha+\beta &= 8 \quad (1)\\ \alpha-\beta &= -4 \quad (2)\end{cases}$

តាមសមីការ (2) យក $\alpha=\beta-4$ ជំនួសក្នុងសមីការ(1)

យើងបាន

$3(\beta-4)+\beta=8$

$\implies 3\beta-12+\beta=8$

$\implies 4\beta=8+12 \implies \beta=5$

យក $\beta=5$ ជំនួសក្នុងសមីការ (2) $\implies \alpha=5-4=1$

ដូចនេះ $\alpha=1$ និង $\beta=5$

2 គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x+1}}{x}$ មានរាងមិនកំណត់$\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x+1}}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}\\ &= \sqrt{4}\\ &= 2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x+1}}{x}=2$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{3-4\sin^2 x}{2\cos x-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3-4\sin^2 x}{2\cos x-1} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4-4\sin^2 x-1}{2\cos x-1}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4(1-\sin^2 x)-1}{2\cos x-1}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos^2 x-1}{2\cos x-1}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(2\cos x-1)(2\cos x+1)}{2\cos x-1}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\cos x+1)\\ &= 2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{3-4\sin^2 x}{2\cos x-1}=2$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^x-2}{\sin x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^x-2}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+e^x-1}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{e^{2x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{e^x-1}{x}\\ &= 1\times 2+1\times 1\\ &= 3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^x-2}{\sin x}=3$

(3) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

(a) $\int\sin 2x\cdot\sin 4x dx$

$$\begin{aligned}&= \int\sin 2x\cdot 2\sin 2x\cos 2x dx\\ &= \int 2\sin^2 2x\cdot\cos 2x dx\end{aligned}$$

តាង $u=\sin 2x \implies du=2\cos 2x dx$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int\sin 2x\cdot\sin 4x dx &= \int u^2 du\\ &= \frac{u^3}{3}+c\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\int\sin 2x\cdot\sin 4x dx=\dfrac{\sin^3 2x}{3}+c,\quad c\in\mathbb{R}$

(b) $\int x^3 \ln x dx$

តាង $\begin{cases} u &= \ln x \implies du = \frac{1}{x}dx \\ dv &= x^3 \implies v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + c \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + c \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(c) $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}dx$

$= \int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx$

តាង $\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} &= \frac{x(x+1)A + (x+1)B + x^2C}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2}{x^2(x+1)} \\ \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)} &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} A + C &= 2 \\ A + B &= 2 \\ B &= 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 1 \\ C &= 1 \end{cases}$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + c \\ &= \ln|x+1| + \ln|x| - \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx = \ln|x+1| + \ln|x| - \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

④ គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = 2x^2 + 10x + 12$ ។

ⓐ កំណត់អនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី២ $g(x)$ ដែលជាចម្លើយនៃសមីការ

តាង $g(x) = ax^2 + bx + c$

$\Longrightarrow g'(x) = 2ax + b$

$g(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ(E)

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} g'(x) + 2g(x) &= 2x^2 + 10x + 12 \\ 2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) &= 2x^2 + 10x + 12 \\ 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) &= 2x^2 + 10x + 12 \end{aligned}$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} 2a &= 2 \\ 2a + 2b &= 10 \\ b + 2c &= 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 4 \\ c &= 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $g(x) = x^2 + 4x + 4$ ជាចម្លើយនៃសមីការ(E) ។

ⓑ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $y = f(x) - g(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ$(E'): y' + 2y = 0$

ដោយ$y = f(x) - g(x) = f(x) - x^2 - 4x - 4$

$\Longrightarrow y' = f'(x) - 2x - 4$

$y = f(x) - g(x)$ជាចម្លើយនៃសមីការ(E)

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 0 \\ f'(x) - 2x - 4 + 2\left(f(x) - x^2 - 4x - 4\right) &= 0 \\ f'(x) + 2f(x) - 2x - 8x - 8 - 4 - 2x^2 &= 0 \\ f'(x) + 2f(x) &= 2x^2 + 10x + 12 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ(E) ។

ⓒ ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E)

$(E'): y' + 2y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $t + 2 = 0 \Longrightarrow t = -2$

នាំឲ្យ $y = Ae^{-2x}, A \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ(E')

ដូចនេះ $y = Ae^{-2x} + x^2 + 4x + 4, A \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

⑤ ចូររកសមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1, -1, 2)$

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែមានរាង $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

ដែល (a, b, c) ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែ និង R ជាកាំនៃស្វ៊ែ

ស្វ៊ែប៉ះទៅនឹងប្លង់ $(P): x + 2y + 2z - 12 = 0$ ត្រង់ A ដែល $x_A = 2, y_A = 1$

យើងបាន៖

$2 + 2 \times 1 + 2z - 12 = 0$

$\Longrightarrow z = \dfrac{12 - 4}{2} = 4$

នាំឲ្យចំណុច A មានកូអរដោនេ $x_A = 2, y_A = 1, z_A = 4$

ដោយ $A(2, 1, 4)$ ជាចំណុចប៉ះរវាងប្លង់និងស្វ៊ែ នាំឲ្យ $d(I, A)$ ជាប្រវែងកាំនៃស្វ៊ែ

$d(I, A) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1, -1, 2)$ គឺ $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

6 ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច $A(-2,3,4), B(-5,7,7)$ និង $C(7,7,3)$

a គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថាចំណុចទាំងបី A, B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា

+ $\overrightarrow{AB} = (-5+2, 7-3, 7-4) = (-3,4,3)$
+ $\overrightarrow{AC} = (7+2, 7-3, 3-4) = (9,4,-1)$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-4-12)\vec{i} - (3-27)\vec{j} + (-12-36)\vec{k} \\ &= -16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k} \\ &= (-16, 24, -48)\end{aligned}$$

ដោយ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq 0$

ដូចនេះ ចំណុចទាំងបី A, B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា។

b +គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$$

$$= \frac{|\sqrt{(-16)^2 + (24)^2 + (-48)^2}|}{2}$$

$$= \frac{|\sqrt{3136}|}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

+សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

សមីការស្តង់ដានៃប្លង់មានរាង $(ABC): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

ដែល (a,b,c) ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ និង (x_0, y_0, z_0) ជាចំណុចរបស់ប្លង់

យក $\vec{n} = (-16, 24, -48)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ និង$A(-2,3,4)$ ជាចំណុចរបស់ប្លង់

យើងបាន៖ $(ABC): -16(x+2) + 24(y-3) - 48(z-4) = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់$(ABC): -16x + 24y - 48z + 88 = 0$

c គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $(OABC)$

$$V_{OABC} = \frac{|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{OA}|}{6}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-16, 24, -48), \overrightarrow{OA} = (-2,3,4)$

យើងបាន៖

$$V_{OABC} = \frac{|(-16)(-2) + (24)(3) + (-48)(4)|}{6}$$

$$= \frac{|32 + 72 - 192|}{6}$$

$$= \frac{|-88|}{6} = \frac{44}{3} \text{ឯកតាមាឌ}$$

ដូចនេះ $V_{OABC} = \dfrac{44}{3}$ ឯកតាមាឌ

⑦ គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = (1-x)(e^{2x}+1)$ កំណត់លើ$\mathbb{R}$

ⓐ គណនាលីមីត

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)(e^{2x}+1) = +\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)(e^{2x}+1) = -\infty$

ⓑ គណនា$f'(x)$ និង $f''(x)$

យើងមាន៖ $f(x) = (1-x)(e^{2x}+1)$

+ $f'(x) = (1-x)'(e^{2x}+1) + (1-x)(e^{2x}+1)'$
$= -(e^{2x}+1) + 2e^{2x}(1-x)$
$= e^{2x} - 2xe^{2x} - 1$

+ $f''(x) = (e^{2x} - 2xe^{2x} - 1)' = 2e^{2x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = -4xe^{2x}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ$f'(x)$

$f''(x) = -4xe^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\implies e^{2x} > 0 \implies f''(x) = 0 \iff -4xe^{2x} = 0 \implies x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	-1 ↗	0	↘ $-\infty$

ⓒ កំណត់សញ្ញានៃ$f'(x)$

ដោយ $f'(x)$ កើនពី(-1) ទៅ (0) ហើយចុះពី (0) មក $(-\infty)$

មានន័យថា$f'(x) \in (-\infty, 0)$

ដូចនេះ $f'(x) < 0$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

ⓓ +បង្ហាញថា$(d): y = 1-x$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃ(C)កាលណា$x \to -\infty$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} (f(x)-(d)) &= \lim_{x\to-\infty} \left[(1-x)(e^{2x}+1) - (1-x)\right] \\ &= \lim_{x\to-\infty} (1-x)(e^{2x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(d)) = 0$

ដូចនេះ $(d): y = 1-x$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃ(C)កាលណា$x \to -\infty$

+បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាង(d) និង (C)

យើងមាន $\quad (C)-(d)=(1-x)e^{2x}$

- បើ$x<1$ នោះ $(C)-(d)>0 \iff (C)>(d)$

មានន័យថា (C) នៅលើ (d) ពេល $x<1$

- បើ$x=1$ នោះ $(C)-(d)= \iff (C)=(d)$

មានន័យថា (C) និង (d) កាត់គ្នាត្រង់ $(1,0)$

- បើ$x>1$ នោះ $(C)-(d)<0 \iff (C)<(d)$

មានន័យថា (C) នៅក្រោម (d) ពេល $x>1$

(e) សរសេរសមីការបន្ទាត់(T)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) មានរាង$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយសមីការបន្ទាត់(T) ប៉ះខ្សែកោង(C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់$(d): y=1-x$

យើងបាន$\begin{cases} f(x_0) &= y_0 \\ f'(x_0) &= -1 \end{cases}$

ដោយ$f'(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-1$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= -1 \\ \implies e^{2x_0}-2x_0e^{2x_0}-1 &= -1 \\ \implies e^{2x_0}-2x_0e^{2x_0} &= 0 \\ \implies (1-2x_0)e^{2x_0} &= 0, \forall x\in\mathbb{R} \\ \implies 1-2x_0 &= 0 \\ \implies x_0 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដោយ $f(x)=(1-x)(e^{2x}+1)$

$\implies f(x_0)=f(\frac{1}{2})=(1-\frac{1}{2})(e^{2\times\frac{1}{2}}+1)=\frac{e+1}{2}$

យើងបាន$\begin{cases} y_0 &= \frac{e+1}{2} \\ f'(x_0) &= -1 \end{cases}$

នាំឲ្យ$(T): y=-(x-\frac{1}{2})+\frac{e+1}{2}=-x+1+\frac{e}{2}$

ដូចនេះ $\quad$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ$(T): y=-x+1+\frac{e}{2}$

(f) កំណត់ចំណុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C)

បើ $f''(x_0)=0$ នោះ $I(x_0,f(x_0))$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង(C)

ដោយ $x_0=0$ ជាឫសនៃសមីការ$f''(x_0)=0$

$\implies I(0,f(0))=I(0,2)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង(C)

សង់ក្រាប $(C),(T)$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់

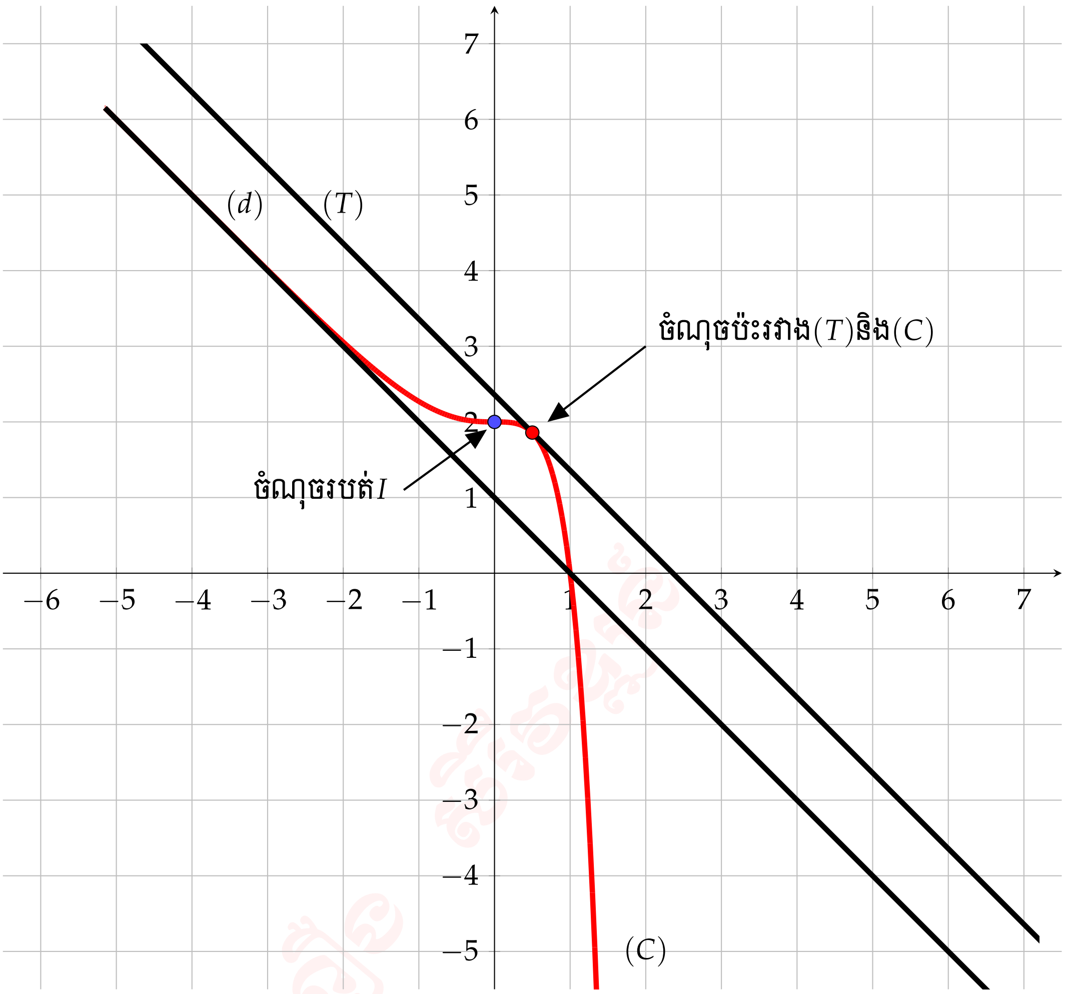
+តារាងតម្លៃលេខ

☞អាស៊ីមតូតទ្រេត $(d): y=1-x$

x	1	0
$y=4-x$	0	1

☞ បន្ទាត់ប៉ះ $(T) y=-x+1+\frac{e}{2}$

x	1	$\frac{e}{2}$
y	$\frac{e}{2}$	1

☞ ខ្សែកោង $(C): y = (1-x)(e^{2x}+1)$

x	0	1
y	2	0